Kombinatorické etudy 7 – LS 2010/2011

Příští ke se konají až po jarní škole, tj. 19.4.2011.

1. (2.22) Buď opět V částečně uspořádaná množina. Najděte funkci $\mu : V \times V \to \mathbb{R}$, pro niž

- $\mu(x, y) = 0$ pokud $x \not\leq y$
- $\mu(x, x) = 1$
- $\sum_{y:x \leq y \leq z} \mu(x, y) = 0$ (pokud $x < z$)

(μ je tzv. Moebiova funkce na V).

2. (5.15) Pokud rovinný graf má Eulerovský tah, tak má i takový tah, kde při kreslení nikdy nepřekřížíme už nakreslenou čáru (max. se jí dotkneme).

3. (9.7 – poslední část z minula)

- Kolik n-obarvení může graf mít? Přesněji: pro každé n, k rozhodněte, zda existuje graf G, který má právě k obarvení n barvami. (Návod: uvažte součin několika kopií K_n a ukažte, že jeho jediná obarvení jsou (pro $n \geq 3$) projekce.

(9.8) Buď S množina bodů. Pokud pro nějaký graf G je $S \subseteq V(G)$, tak každé obarvení G indukuje nějaký rozklad S. Vnořte S do grafu G tak, aby rozklady, určené všemi k-obarveními (pro dané $k \geq 3$) byly právě následující

- rozklad S na jednoprvkové množiny (tady potřebujeme $|S| \leq k$);
- všechny rozklady kromě předchozích;
- jen rozklad $\{S\}$;
- všechny rozklady kromě předchozího;
- * daná množina $\{P_1, \ldots, P_N\}$.

Ve všech případech chceme, aby žádné jiné rozklady nevznikly.

4. (11.10) Buďte G, H dva grafy s vrcholy $\{\varepsilon^i : i = 0, \ldots, p-1$, kde $\varepsilon = e^{2\pi i/p}$, p prvočíslo. Nechť G i H jsou invariantní vůči rotaci o $2\pi/p$. Pokud G a H jsou isomorfní, tak existuje přirozené t, pro něž umocnění na t-tou je isomorfismus $G \to H$.

5. (12.6) * Opět máme grupu Γ s n prvky, tentokrát $n \geq 6$. Najděte graf G s $2n$ vrcholy, že $Aut(G) \cong \Gamma$.

6. (15.8)

(a) Zkonstruujte dva isomorfní rovinné 2-souvislé grafy, jejichž duály nejsou isomorfní.

(b) Ukažte, že pokud jsou dva rovinné 3-souvislé grafy isomorfní, jsou isomorfní i jejichž duály.