Kombinatorické etudy 5 – ZS 2010/2011

1. (3.23)

(a) Kolik konvexních k-úhelníků lze vytvořit z vrcholů pravidelného n-úhelníku, pokud se dva k-úhelníky lišící se otočením považují za stejné?

(b) Kolik je k-obarvení vrcholů pravidelného n-úhelníku, pokud obarvení lišící se otočením považujeme za stejná?

2. (6.13) Silně souvislý turnaj T s $n \geq 4$ vrcholy obsahuje aspoň dva vrcholy x, pro které $T \setminus x$ je silně souvislý.

3. (7.11) Buď G bipartitní graf a $k \geq 1$. Ukažte, že G je sjednocení k hranově disjunktních grafů $G_1, \ldots, G_k$ takových, že $\lfloor \deg(v)/k \rfloor \leq d_{G_i}(v) \leq \lceil \deg(v)/k \rceil$ pro všechny $v \in V(G)$, $i \in [k]$.

4. (11.3) Buď T les, $e = (u, v)$ jeho hrana. Pomocí p_G budeme značit charakteristický polynom grafu G (resp. jeho matice sousednosti). Ukažte, že

$$p_T(\lambda) = p_{T-e}(\lambda) - p_{T-u-v}(\lambda)\,.$$

5. (13.5)

(a) (Hallova věta) Hypergraf H má systém různých reprezentantů, právě když $V(H') \geq E(H')$ pro všechny podhypergrafy $H' \subseteq H$.

(b) Pro hypergraf H chceme z každé hrany E vybrat dvouprvkovou podmnožinu $f(E)$ tak, že množiny $f(E)$ tvoří hrany nějakého lesa. Ukažte, že je to možné, právě když pro každý podhypergraf $H' \subseteq H$ platí $|V(H')| \geq |E(H')| + 1$.

6. (14.3) – tohle jsme minule taky nestihli
Z minula nám chybí část (b). Dále si připomeňte/dokažte Ramseyovu větu:

(a) Buď K_n^r hypergraf tvořený všemi r-ticemi z n bodů. Nechť $a_1, \ldots, a_k \geq 1$. Ukažte, že existuje číslo N (nejmenší takové buď $R_n^r(a_1, \ldots, a_k)$), že kdykoli obarvíme hrany (tj. r-tice) hypergrafu K_N^r pomocí k barev, tak pro nějaké i najdeme $K_{a_i}^r$ jehož všechny hrany mají barvu i.

(b) Označme $R_k(a) = R_k(a, \ldots, a)$. Dokažte, že

$$R_k^{r+1}(a) < k^{R_k^r(a)^r}\,.$$

7. (bonus) Dokažte charakterizaci dvourozměrných variet bez kraje. Pro vyhnutí se analýznickým kejklům uvažujme jenom triangulované variety (čili konečnou množinu trojúhelníčků, které se stýkají vždy dva za hranu a 've vrcholech to vyjde jako v rovině). Ukažte, že každá taková plocha je koule s nalepenýma 'ušima' nebo Möbiovými pásky.