

## 6. cvičení z MA — 20.4.2011

### Funkce více proměnných

#### Limity a vůbec

1. Spočtěte následující limity

(a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin xy}{x}$ ,

(b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ,

(c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x+y}$ .

2. Ve kterých bodech jsou následující funkce definovány? Spojité? Jsou omezené?

(a)  $\frac{2xy}{x^2 + y^2}$ ,

(b)  $\cos \frac{1}{xy}$ ,

(c)  $\frac{1}{1 - x^2 - y^2}$ ,

(d)  $\log \sqrt{x^2 + y^2}$ ,

(e)  $\frac{1}{(x-y)^2}$ ,

(f)  $\frac{\sin xy}{|x| + |y|}$ .

#### Parciální derivace

3. Spočtěte parciální derivace (podle všech proměnných) funkcí

(a)  $x^2 + 4xy^3 + y^5$ ,

(b)  $x^{y^2}$ ,

(c)  $(1+x)^k(1+y)^\ell(1+z)^m$ ,

(d)  $\log(1+x)\log(1+y)$ ,

(e)  $(1+x)^{1+y}$ .

4. Prověřte rovnost  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  pro

(a)  $f(x, y) = x^2 + 4xy^3 + y^5$ ,

(b)  $f(x, y) = x^{y^2}$ .

#### Hledání extrémů

5. Nalezněte lokální/globální extrémy funkcí

(a)  $x^2 + (y-1)^2$ ,

(b)  $x^2 - (y-1)^2$ ,

(c)  $x^3 + (y-1)^3$ ,

(d)  $(x-y+1)^2$ ,

(e)  $(x-y+1)^3$ ,

(f)  $x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ ,

(g)  $xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ ,  $x, y > 0$ ,

(h)  $(x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$ ,

(i)  $\frac{ax+by+c}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$  ( $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ ),

(j)  $\sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z)$ , pro  $x, y, z \in [0, \pi]$ .

## Totální diferenciál

6. Napište totální diferenciál ( $v(x, y) = (0, 0)$ ) pro funkce

(a)  $(1+x)^k(1+y)^\ell(1+z)^m$ ,

(b)  $\log(1+x)\log(1+y)$ ,

(c)  $(1+x)^{1+y}$ .

7. Vyčíslete přibližně

(a)  $1.02 \cdot 2.03^2$ ,

(b)  $1.02 \cdot 2.03^2 \cdot 0.98^3$ ,

(c)  $1.01^{0.98}$ ,

(d)  $\sin 31^\circ \operatorname{tg} 46^\circ$ ,

(e)  $\frac{1.02^3}{\sqrt[4]{0.97}\sqrt{1.01}}$ .