7. cvičení z MA — 7.12.2010

Ještě pár řad

1. Vyšetřete absolutní i neabsolutní konvergenci následujících řad.
(a) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\log k}$
(b) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\sqrt[k]{3} - 1)$
(c) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{3k - 100\sqrt{k}}$
(d) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{k}$ ($z \in \mathbb{R}$ je parametr)
(e) $\sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k}{k} z^k$ ($z \in \mathbb{R}$ je parametr)

Hrátky s funkcemi

2. Pomocí součtových vzorců

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

a "počátečních podmínek"

$$\sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1$$

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x$$

dokažte
(a) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,
(b) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
(c) $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$

3. Nechť $t = \operatorname{tg} x$. Dokažte následující vztahy
(a) $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$,
(b) $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$.

4. Nechť $t = \operatorname{tg}(x/2)$. Dokažte následující vztahy
(a) $\cos^2(x/2) = \frac{1}{1+t^2}$,
(b) $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$,
(c) $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

I když to tak možná nevypadá, tyto vzorce se nám budou v letním semestru náramně hodit.

5. Definujme $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ a $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$. (Přičemž i je komplexní číslo splňující $i^2 = -1$.) Pomocí vlastností exponenciály $e^0 = 1$, $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ odvoďte výše uvedené vlastnosti sinu a cosinu.