4. cvičení z MA — 9.11.2010

(Toto je už šesté cvičení v semestru, ale jeden papír nám vystačil navíckrát.)

Rozcvička

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-3}$ **2.** $\lim\limits_{n\to\infty} n - 5\lfloor n/5\rfloor$ **3.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-5\lfloor n/5\rfloor)}{n}$

Další limity

4. $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor^3}{n-\lfloor\sqrt{n+9}\rfloor}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n+2n^n+n!}{(n+1)^4+\sin n+(3n)!}$

7. (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2})$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{\sqrt{n^7}+\sqrt[3]{n^7}} - \sqrt[3]{\sqrt{n^7}-\sqrt[3]{n^7}})$

8. Spočtěte v závislosti na $k, l \in \mathbb{N}$ (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k-(n-1)^l}{n^k+n^l}$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^k+(-n)^l}{(n-1)^k-n^l}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{i}{n}\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$

10. (Wallisova formule) Dokažte, že součin $\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots$ má konečnou nenulovou hodnotu. Nemusíte dokazovat (ale je to pravda), že tato hodnota je $\pi/2$.

11. Čemu se rovná $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$?

12. * Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{k} a_i\sqrt{n+i}=0$, pokud $\sum\limits_{i=0}^{k} a_i = 0$.

13. * Pro která $x\in\mathbb{R}$ existuje $\lim\limits_{n\to\infty}\sin nx$? Totéž pro $\lim\limits_{n\to\infty}\cos nx$.

---

14. Rekurentně zadané posloupnosti — vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (a nezapomeňte si rozmyslet, zda limita vůbec existuje) pro (a) $a_1 = t$ ($t>0$ je parametr), $a_{n+1}=(a_n+2/a_n)/2$,
(b) $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$,
(c) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1/(1+a_n)$.
(d) $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2-a_n}$
(e) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + (x-a_n)^2/2$ $(0\le x\le 1)$
(f) (Jako varování!) $a_1 = 0.4$, $a_{n+1} = 4a_n(1-a_n)$.

---

15. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:
(a) Pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} 1/a_n = 0$.
(b) Pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, potom $\lim\limits_{n\to\infty} 1/a_n = +\infty$.

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, právě když $\lim_{n\to\infty} 1/|a_n| = +\infty$.
(d) Pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, potom $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = A$.
(e) Pokud $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = A$, potom $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.
(f) $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, právě když $\lim_{n\to\infty} a_{b_n} = A$ pro každou rostoucí posloupnost přirozených čísel b_n.
(g) $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, právě když $\lim_{n\to\infty} a_{b_n} = A$ pro každou neklesající posloupnost přirozených čísel b_n.