1. test – $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje

napr. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ divergují

ale: $\lim a_n = 0 \not\Rightarrow \sum a_n$ konverguje – pozor!!

$\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergují!

2. kritéria konvergence – „zkoumání" posloupnosti částečných součtů pomocí vět, které nám umožní k zjištění konvergence (resp. divergence) posloupnosti (ani nemusíme „spočítat" limitu)

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$: (analog. pro $a_n \leq 0$)

posloupnost částečných součtů je neklesající (resp. nerostoucí), pak $\lim\limits_{k\to\infty} s_k \in R \iff \{s_k\}$ je shora omezená (resp. zdola)

odtud – srovnávací kritéria

(i) $0 \leq a_n \leq b_n$, $n \in N$, $\sum\limits_{1}^{\infty} b_n$ konverguje $\Rightarrow \sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ konverguje

($\Leftarrow$ $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ diverguje $\Rightarrow \sum\limits_{1}^{\infty} b_n$ diverguje)

srovnávací řady: $\sum\limits_{0}^{\infty} q^n$ konv. $\iff |q|<1$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konv. $\iff p>1$

odtud: $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ konverguje, neboť $\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$ $\forall n \in N$

a $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje;

$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 3^n}$ konverguje, neboť $\frac{1}{n3^n} \le \frac{1}{3^n}$ $\forall n \in N$ a

$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ konverguje

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\sqrt{n}}$ konverguje, neboť $\frac{1}{(n+3)\sqrt{n}} \le \frac{1}{n\sqrt{n}}$ $\forall n \in N$ a

$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ konverg.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n-1}$ diverguje, neboť $\frac{\sqrt{n}}{2n-1} \ge \frac{\sqrt{n}}{2n} \ge \frac{1}{2\sqrt{n}}$ a

$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ diverguje

$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konverguje, neboť $\frac{1}{n!} \le \frac{1}{n(n-1)}$ a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$

konverguje

(viz část 1)

(ii) <u>limitní srovnávací kritérium</u>

$0 < a_n \le b_n$, pak platí:

je-li $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A > 0$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje

je-li $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, pak $\sum_{1}^{\infty} b_n$ konverguje $\Rightarrow$ $\sum_{1}^{\infty} a_n$ konverguje

<u>Cvičení</u>: promyslete, co lze říci o konvergenci $\sum_{1}^{\infty} a_n$, $\sum_{1}^{\infty} b_n$, když $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$.

Příklady: Vyšetřit konvergenci řad:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n+1}$ konverguje, neboť:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2-n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2-n+1} = 1 \quad \text{a} \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konverguje}$$

„hledání" srovnávací řady – a vyšetřování limit posloupností

„vidět", že posloupnost $\left\{\frac{1}{n^2-n+1}\right\}$ se „chová" jako $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$

(při hledání limit je rozhodující nejvyšší mocnina)

---

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ diverguje:

$\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ se „chová" jako $\frac{1}{\sqrt{n}}$: tj

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \quad \text{a} \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ diverguje}$$

(srovnávací řada)

Pozn.: „absolutní srovnání" zde nejde – $\frac{\sqrt{n}}{n+1} \le \frac{1}{\sqrt{n}}$, ale z divergence „větší" řady ~~ob~~ nelze soudit na divergenci řady „menší"

---

3) Znáte asi $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (ze střední školy)

odtud: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ diverguje, neboť

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \quad \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\right)$$

a $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje

ale $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$ konverguje, neboť $\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n} \le \frac{1}{n^2}$

a $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje