PRAVDĚPODOBNOSTNÍ METODA
ZS 2009/10 soubor úloh č. 3

(**17.11.** nápověda, **24.11.** řešení)

Zápočet: ≥ 42 b, zkouška: ≥ 110 b. Za příklady dodané před návodem je dvojnásobek, po předvedení řešení dostanete jen 2/3 bodů.

1. Buď A matice $n \times n$, její prvky buďte náhodně zvolené $+1$ nebo -1 (každý nezávisle).

   (a) Ukažte, že střední hodnota $\det A$ je 0. **1**

   (b) Spočtěte střední hodnotu $(\det A)^2$. **2**

2. Dokažte následující variantu Čebyševovy věty: Buď X reálná náhodná veličina, pro niž $E[X] = 0$ a $Var[X] = \sigma^2$. Pak pro každé $\lambda > 0$ platí
$$P(X \geq \lambda) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \lambda^2}\,.$$
3

3. Nechť pro $i = 1, \ldots, n$ je $v_i = (x_i, y_i)$ dvojice celých čísel, jejichž absolutní hodnota nepřesahuje $2^{n/2}/(100\sqrt{n})$. Dokažte, že existují dvě disjunktní množiny $I, J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ takové, že
$$\sum_{i \in i} v_i = \sum_{j \in J} v_j\,.$$
2

4. Buď P monotonní grafová vlastnost, tj. taková, že když G má P, tak každý graf H s $V(H) = V(G)$ a $E(H) \supseteq E(G)$ má také P. Označme $G_{n,p}$ náhodný graf s n vrcholy: každá hrana je přítomna s pravděpodobností p (nezávisle na ostatních hranách). Dokažte, že když $p_1 < p_2$, tak
$$P(G_{n,p_1} \text{ má } P) \leq P(G_{n,p_2} \text{ má } P)\,.$$
3

5. Pokud H je podmnožina grupy G (ne nutně podgrupa!), tak H^2 označuje množinu
$$H^2 = \{x \in G \mid \exists y, z \in H, x = y \cdot z\}\,.$$
   Ukažte, že existuje konstanta $C > 0$ taková, že pro každou grupu G s n prvky existuje množina $H \subseteq G$ pro kterou $H^2 = G$ and $|H| < C\sqrt{n \log n}$. (Pozn.: o grupách potřebujete vědět jenom definici.) **3**

6. Připomeňme, že $m(n)$ je minimální počet hran n-uniformního hypergrafu, který nejde dobře obarvit dvěma barvami. Ze začátku semestru byl na přednášce předveden odhad $m(n) \geq 2^{n-1}$. Nyní ukažte, že $m(n) \leq c\,n^2\,2^n$. **6**