

PRAVDĚPODOBNOSTNÍ METODA

ZS 2009/10 soubor úloh č. 1

(20.10. nápověda, 27.10. řešení)

Zápočet: ≥ 42 b, zkouška: ≥ 110 b. Za příklady dodané před návodem je dvojnásobek, po předvedení řešení dostanete jen 2/3 bodů. $[n]$ značí $\{1, 2, \dots, n\}$.

1. Buď $(\Omega, 2^\Omega, P)$ konečný pravděpodobnostní prostor, ve kterém všechny elementární jevy mají tutéž pravděpodobnost. Dokažte, že když $|\Omega|$ je prvočíslo, tak žádné dva netriviální jevy nejsou nezávislé. (Triviálními jevy myslíme \emptyset a Ω .) **1**
2. Hodíme n -krát spravedlivou mincí. Jaká je střední hodnota počtu ‘úseků’? Úsekem rozumíme několik po sobě jdoucích hodů s týmž výsledkem, např. v posloupnosti PPPOOPOPO je šest úseků. **2**
3. Určete střední hodnotu délky počátečního rostoucího úseku náhodné permutace $[n]$. (Zde jsou dvě permutace s podtrženým počátečním rostoucím úsekem: (1 4 5 3 2), (3 2 5 4 1).) Jaká je limita střední hodnoty pro $n \rightarrow \infty$? **2**
4. Jaká je pravděpodobnost, že 1 a 2 jsou ve stejném cyklu náhodné permutace $[n]$? **2**
5. Každé balení čokolády obsahuje jednu zajímavou informaci z dějin výroby čokolády, uniformně náhodně vybranou z n možností. Jaká je střední hodnota počtu čokolád, které koupíme, než zjistíme všech n informací? **3**
6. Dokažte, že když existuje reálné číslo $p \in \langle 0, 1 \rangle$, pro které

$$\binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{l} (1-p)^{\binom{l}{2}} < 1,$$

tak Ramseyovo číslo $R(k, l)$ splňuje $R(k, l) > n$. **1**

Pomocí toho dokažte, že

$$R(4, t) \geq \Omega(t^{3/2}/(\ln t)^{3/2}).$$

1

7. Dokažte, že existuje konstanta $c > 0$ s následující vlastností. Buď A matice $n \times n$ jejíž složky jsou po dvou různé. Pak existuje taková permutace řádek A , že v žádném sloupci není rostoucí podposloupnost délky alespoň $c\sqrt{n}$. **2**