Kombinatorické etudy 6

1. (3.20) Buď n pevné. Označme a_k počet permutací $[n]$ $(= \{1, \dots, n\})$, které mají právě k inverzí. Ukažte, že

$$\sum_k a_k x^k = (1+x)(1+x+x^2)\dots(1+x+\dots+x^{n-1})\,.$$

2. (5.28) (a) Lze dovnitř pětiúhelníku nakreslit rovinný graf, jehož všechny stěny (vyjma tu vnější) jsou trojúhelníky, a každý vrchol má sudý stupeň?

(b) Totéž, ale vrcholy vnějšího pětiúhelníku mohou být lichý stupeň. Které z těchto vrcholů budou mít lichý stupeň?

3. (6.7) (a) Buďte T_1, T_2 kostry souvislého grafu G. Dokažte, že je možné převést T_1 na T_2 pomocí posloupnosti operací "odeber hranu a jinou hranu přidej", přičemž po každé takové operaci nám vznikne také kostra.

(b) Nechť G je 2-souvislý. Potom stačí použít operaci "utrhni list a připoj ho jinam".

4. (7.6) (a) Buď G bipartitní graf s partitami A, B, a buď $k \geq 0$ celé číslo pro které

$$|N_G(X)| \geq |X| + k$$

platí pro všechny neprázdné množiny $X \subseteq A$. Buďte X_1, X_2 dvě množiny pro které v této nerovnosti nastává rovnost. Ukažte, že pokud $X_1 \cap X_2$ je neprázdná, tak pro ni také nastává rovnost.

(b) Ukažte, že graf G z části (a) má podgraf G' obsahující A, pro který

- $\deg_{G'} x = k+1$ pro všechny $x \in A$ a
- $|N_{G'}(X)| \geq |X| + k$ pro všechny neprázdné $X \subseteq A$.

5. (8.6) V každém turnaji (orientaci úplného grafu) existuje vrchol, z něhož lze do všech ostatních vrcholů dojít cestou délky nejvýše dva.

6. (10.6) (a) Pokud graf obsahuje minor K_4, obsahuje i dělení K_4.

(b) Pro K_5 to neplatí. Najděte 4-souvislý protipříklad!