

Kombinatorické etudy 1

1. Buď π náhodná permutace $[n]$. Označme I_i počet indexů $1 \leq j \leq i$, pro něž $\pi(i) \leq \pi(j)$. Pak I_1, \dots, I_n jsou náhodné veličiny. Ukažte, že jsou nezávislé.
2. Buď G rovinný graf a G^* jeho duál. Ukažte, že G a G^* mají stejný počet koster.
3. Buďte G_1, G_2 grafy se stejnou množinou vrcholů. Ukažte, že platí

$$c(G_1) + c(G_2) \leq c(G_1 \cup G_2) + c(G_1 \cap G_2)$$

($c(G)$ označuje počet komponent grafu G).

4. Buď G graf bez izolovaných vrcholů. Pak $\nu(G) + \rho(G) = |V(G)|$. (Zde $\nu(G)$ je velikost největšího párování, $\rho(G)$ je minimální počet hran, které pokrývají všechny vrcholy.)
5. Graf, jehož všechny vrcholy mají stupeň nejvýše d , obsahuje nezávislou množinu s alespoň $\frac{|V(G)|}{d+1}$ prvky.
6. Necht' graf G s n vrcholy má více než $3(n-1)/2$ hran. Ukažte, že G obsahuje Θ -graf, tj. dva body spojené třemi cestami, které jsou kromě konců vrcholově disjunktní.