2. cvičení z MA — 8. a 13.10.2008

Hrátky s goniometrickými funkcemi

1. Pomocí součtových vzorců

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

dokažte
(a) $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,
(b) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
(c) $\sin^2 x = (1-\cos 2x)/2$

2. Nechť $t = \operatorname{tg} x$. Dokažte následující vztahy
(a) $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$,
(b) $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$.

3. Nechť $t = \operatorname{tg}(x/2)$. Dokažte následující vztahy
(a) $\cos^2(x/2) = \frac{1}{1+t^2}$,
(b) $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$,
(c) $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

I když to tak možná nevypadá, tyto vzorce se nám budou v letním semestru náramně hodit (a některé i dřív ...).

Matematická indukce

Jak funguje důkaz matematickou indukcí? Zkuste to na následujících příkladech!

4. Pro každé n přirozené platí
(a) $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
(b) $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}$
(c) $1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} = \frac{q^n-1}{q-1}$ pro $q \neq 1$

5. Pro každé n přirozené a x reálné platí

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos\frac{1}{2}x - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} .$$

6. Pro přirozené $n \neq 3$ platí $2^n \geq n^2$.

7. $\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$. Přitom $e = 2.71828\ldots$ je základ přirozeného logaritmu; bude se vám hodit, že $(1+1/n)^n \leq e$ pro každé přirozené n, to dokazovat nemusíte. Pro horní odhad lze místo indukce použít AG-nerovnost.

8. * Dokažte AG-nerovnost (z minulého týdne). Návod: napřed dokazujte pro $n = 2^k$ (k přirozené), pak pro ostatní n “zpětnou indukcí” $n+1 \to n$.