

1. cvičení z MA — 1. nebo 6.10.2008

Funkce

1. Nakreslete grafy následujících funkcí:

- (a) $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos(x + \pi)$, $\cos(2x + \pi)$, $2 \cos x + 1$
- (b) $||x - 1| - 1|$, $||x - 1| - 1|^2$, $||x - 1|^2 - 1|$
- (c) $\sin |x|$, $|\sin x|$
- (d) $\sin x^2$, $\sin 1/x$, $\ln \sin x$, $\ln \ln \sin x$
- (e) $\sqrt{1 - x^2}$
- (f) $\sin x \cdot \cos x$
- (g) $x + 1/x$

2. Vyhovuje funkce daná předpisem $f(x) = \sin x$ následujícímu výroku, nebo jeho negaci?

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists K > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x > K \implies |f(x)| < \varepsilon$$

3. Který z následujících výroků je silnější? (Říkáme, že výrok A je silnější než výrok B , pokud z platnosti A můžeme usoudit, že B také platí.)

- $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists K > 0) \quad |f(x + 1) - f(x)| \leq K$
- $(\exists K > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) \quad |f(x + 1) - f(x)| \leq K$

4. Bud' $f : X \rightarrow Y$ libovolné zobrazení (co to znamená?), $A, B \subseteq X$ libovolné množiny.

- (a) Jaký je vztah mezi množinami A a $f^{-1}(f(A))$?
- (b) Jaký je vztah mezi množinami $f(A \cup B)$ a $f(A) \cup f(B)$?
- (c) Jaký je vztah mezi množinami $f(A \cap B)$ a $f(A) \cap f(B)$?

AG nerovnost

5. Pro kladná reálná čísla x_1, \dots, x_n platí

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n).$$

Dokažte pro $n = 2$ a zapamatujte si pro všechna přirozená n .

Logika, výroky

6. Pro libovolné výroky a, b jsou následující výroky ekvivalentní. (Připomeňte si napřed pravdivostní tabulky logických spojek – nebo se zeptejte, pokud nevíte o č jde.) Rozmyslete si a dobře zapamatujte, při chápání důkazů se vám to bude hodit!

(i) $a \implies b$, (ii) $\neg b \implies \neg a$, (iii) $\neg a \vee b$, (iv) $\neg(a \& \neg b)$.

7. Řekněte bez použití "implikace": Nebude-li pršet, nezmoknem. Kdo se bude snažit, dostane zápočet. Kdo získá dost bodů z písemky, dostane zápočet. Kdo nebude nic umět a nebude se snažit, ten nedostane zápočet.

8. Znegujte: Když prší, nevycházím z domu. Nebude-li pršet, nezmoknem. Zmokneme, právě když bude pršet.

9. Zapište pomocí kvantifikátorů a znegujte: Všechna přirozená čísla jsou sudá. Každé prvočíslo je liché. Některé přirozené číslo je dělitelné všemi prvočísly. Mezi n a $2n$ vždy najdeme nějaké prvočíslo.

Web: <http://kam.mff.cuni.cz/~samal>