

# 1. zkoušková písemka z MA – 19.1.2009

Na každý papír napište: číslo příkladu, jméno a paralelku: Y (Šámal) nebo Z (Rataj).

1. (10 bodů) Nalezněte limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^2 \sin x}.$$

2. (10 bodů) Vyšetřete konvergenci řady (log značí přirozený logaritmus)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \log \left( 1 + \frac{2}{n} \right) \right)^a$$

(a) pro  $a = 1$ , (b)  $a \in \mathbb{R}$  je parametr.

3. (10 bodů) Určete definiční obor následující funkce a její derivaci (jednostranné derivace) ve všech bodech, kde existují.

$$f(x) = \operatorname{arctg}(|x| \sin x)$$

4. (20 bodů) Vyšetřete průběh následující funkce (tj. najděte definiční obor, obor spojitosti, extrémy, inflexní body, asymptoty, vyšetřete monotonii a konvexitu / konkávnost, chování v krajních bodech definičního oboru, nakreslete graf).

$$g(x) = (1 + x)e^{-|x|}$$

---

Na vypracování máte 120 minut.

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty.

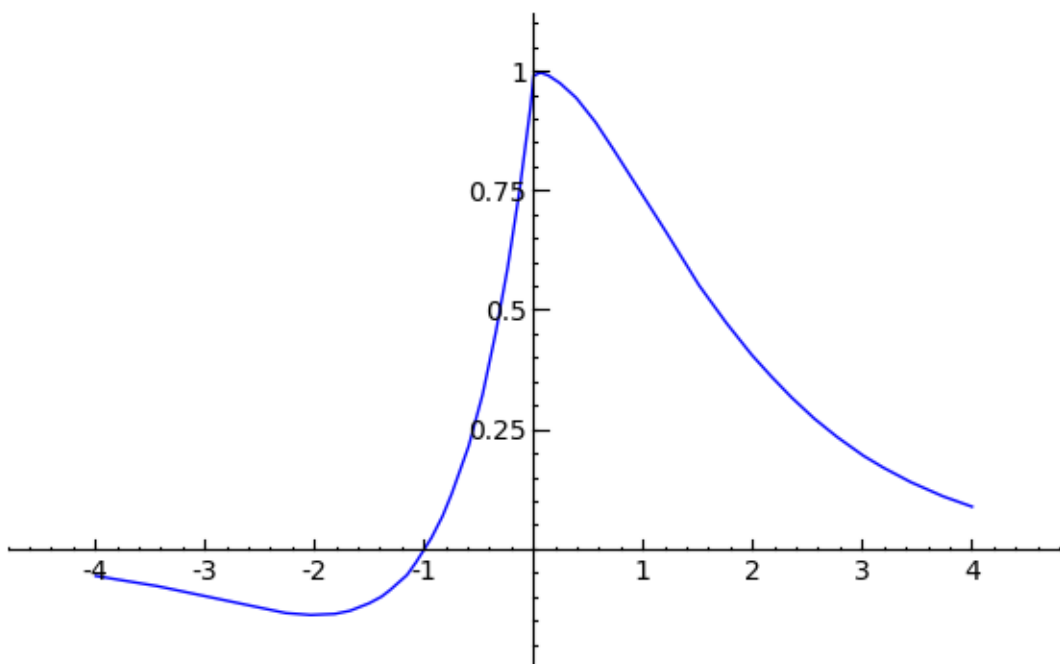
Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítač, mobily, ... (Mobilům prosím předem vypněte zvonění.)

Přeji vám hodně štěstí.

## Stručné výsledky

1. vyjde  $-1/2$ , např. pomocí l'Hospitalova pravidla. Není od věci napřed pokrátit  $\sin x$ .
2. Konverguje právě když  $a > 1$ . (Limitní srovnávací kritérium s řadou  $1/n^a$ .)
3. Je třeba rozdělit na  $x > 0$  a  $x < 0$ , derivaci v 0 počítat zvlášť zleva a zprava coby jednostranné limity derivací. Vyjde

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2 \sin^2 x} \cdot (\sin x + x \cos x) & \text{pro } x > 0 \\ \frac{1}{1+x^2 \sin^2 x} \cdot (-\sin x - x \cos x) & \text{pro } x < 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$



4. ;

## Tipy

Naučte se derivovat “arcus-funkce”.

Naučte se používat limitní srovnávací kritérium. (A dejte pozor, že funguje jenom pro řady s nezápornými členy.)

Při vyšetřování průběhu funkce: pro zjištění, že v nějakém bodě je extrém (resp. inflexní bod) *nestačí* ověřit, že je tam derivace (resp. druhá derivace) nulová!

Toto je podmínka nutná, ne však postačující. Co např. stačí je, že funkce je “vlevo konvexní, vpravo konkávní” (nebo naopak) pro inflex, “vlevo rostoucí, vpravo klesající” pro maximum, atd.