Stručné poznámky z MA pro I — ZS 2008/9

Robert Šámal

17. ledna 2009

Tento text se vztahuje k předmětu NMAI054, paralelka Y. Vznikl (vzniká) úpravou textu z loňska od Stanislava Hencla (děkuji!). Najdete zde soupis definic, vět a něco málo dalších poznámek. Co zde naopak není, jsou důkazy. (Avšak pokud důkaz na přednášce nebyl, je to zde napsáno.) Pokud jste důkaz "nechytili" na přednášce, poraďte se s kolegou nebo doporučenou literaturou. Pomocí vodorovných čar jsou odděleny jednotlivé přednášky. (Poslední tři přednášky odděleny nejsou, protože jsme přeskakovali. Za úplně poslední přednáškou je Taylorův polynom, který odsuneme do letního semestru.)
Pokud narazíte na nějakou nesrovnalost, dejte mi prosím vědět. (Zatím se s připomínkami se ozvali Tomáš Masařík, Ondřej Kupka, Roman Diba a Roman Říha. Děkuji!)
Věty, které jsme si na přednášce dokazovali, jsou rozděleny do dvou typů: L Věta a T Věta (viz požadavky ke zkoušce), tyto věty byste měli umět dokázat. U ostatních vět (a dvou odhlasovaných výjimkách) stačí znát znění (a rozumět mu). Když jsme si dokazovali jen část věty (nebo jsme v důkazu vynechali část), je to v tomto textu uvedeno a budu zkoušet jen tyto části důkazu.
V textu jsou uvedeny otázky k zamyšlení (více jich ještě přibude, snad brzy). Mohou vám pomoci k lepšímu vhledu do příslušného tématu. (Některé jsou trochu těžší, tím se nenechte vyvést z míry. Kdyžtak se zeptejte kolegy, a nebude-li vědět, mě.)
Další (důležitá!) možnost, jak takové otázky sami generovat: Při čtení znění vět se zamyslete, jak je který předpoklad důležitý; co když místo uzavřeného intervalu bude otevřený? co když funkce nebude spojitá? Pokud je věta implikace, mohla by platit jako ekvivalence?
. . . je snadné najít protipříklady – příklady funkcí/posloupností/. . . pro které taková varianta věty neplatí?. (Tip: tím si znění i mnohem snáze zapamatujete a také více vychutnáte.) Při čtení důkazu pozorujte, kde a jak se který předpoklad použije. Použila se nějaká věta z dřívější části přednášky? Bylo dopředu jasné, že se použije?

I. Úvod

1.1. Přehled & Úvod do důkazů

O čem budeme mluvit: reálná čísla, jejich posloupnosti, řady a funkce.
Co je a co není důkaz. Co jsou výroky a jak s nimi zacházet.

L Věta A. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
Jinak řečeno, pro žádné $q \in \mathbb{Q}$ neplatí $q^2 = 2$.
(Důkaz sporem.)

K zamyšlení: Následující čísla také nejsou racionální: $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, . . .

L Věta B (Bernoulliova nerovnost)**.** *Pro $x > -1$ a $n \in \mathbb{N}$ platí $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.*

(Důkaz indukcí.)

1.2. Množina reálných čísel

Všichni víme, co jsou to přirozená čísla $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, jak se rozšiřují tak, aby šlo odčítat (na celá čísla $\mathbb{Z}$), a dělit (na racionální čísla $\mathbb{Q}$). Jak jsme viděli minule, tak stále nejde např. odmocňovat. Místo toho, abychom přidávali jednu další operaci, přidáme v jistém smyslu všechny tím, že "zalepíme díry" (viz Věta 1 níže).

Definice. Těleso *je pětice* $(T, +, \cdot, 0, 1)$ *kde* T *je množina,* $0 \neq 1$ *prvky* T *a* $+$, $\cdot$ *operace na* T *tak, že platí*

1. $\forall x, y, z \in T : x + (y + z) = (x + y) + z$
2. $\forall x, y \in T : x + y = y + x$
3. $\forall x \in T : x + 0 = x$
4. $\forall x \in T\ \exists {-x} \in T : x + (-x) = 0$
5. $\forall x, y, z \in T : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
6. $\forall x, y \in T : x \cdot y = y \cdot x$
7. $\forall x \in T : x \cdot 1 = x$
8. $\forall x \in T \setminus \{0\} \exists x^{-1} \in T : x \cdot x^{-1} = 1$
9. $\forall x, y, z \in T : (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

Definice. Uspořádané těleso *je šestice* $(T, +, \cdot, 0, 1, <)$ *taková, že*

1. $(T, +, \cdot, 0, 1)$ *je těleso*
2. $<$ *je tzv. uspořádání na* T*:*
   - $\forall x, y \in T : x < y$ *nebo* $x > y$ *nebo* $x = y$
   - $\forall x, y, z \in T : x < y\ \ \&\ \ y < z \implies x < z$
   - $\forall x \in T : \neg(x < x)$
3. *operace jsou kompatibilní s uspořádáním:*
   - $\forall x, y, z \in T : x < y \implies x + z < y + z$
   - $\forall x, y, z \in T : x < y \& z > 0 \implies x \cdot z < y \cdot z$

Poznámka. *Z výše uvedených vlastností už lze dokázat "vše ostatní": od trivialit (jako* $0 < 1$*) po věci užitečné (jako vzorce pro* $(x + y)^2$*, jak řešit lineární rovnice, ...).*

Příklad. *Racionální čísla s běžnými operacemi jsou uspořádané těleso. Reálná čísla také (ale ještě přesně nevíme, co to reálná čísla jsou). Komplexní čísla a celá čísla modulo prvočíslo jsou příklady těles, která nejdou uspořádat. (***K zamyšlení:** *Proč?)*

Definice. *Nechť* $(T, +, \cdot, 0, 1, <)$ *je uspořádané těleso a* $M \subseteq T$*. Řekneme, že* M *je* omezená shora *(resp.* omezená zdola*), jestliže existuje* $a \in T$ *tak, že pro všechna* $x \in M$ *platí* $x \leq a$ *(resp.* $x \geq a$*). Takové* a *nazveme* horní závora *(resp.* dolní závora*) množiny* M*.*

Definice. *Nechť je opět* $(T, +, \cdot, 0, 1, <)$ *je uspořádané těleso a* $M \subseteq T$. *Číslo* $s \in T$ *nazýváme* supremum M *pokud*

$$(i)\ \forall x \in M : x \leq s;$$
$$(ii)\ \forall y \in T,\ y < s\ \exists x \in M : y < x.$$

Číslo $i \in T$ *nazýváme* infimum M *pokud*

$$(i)\ \forall x \in M : i \leq x;$$
$$(ii)\ \forall y \in T,\ i < y\ \exists x \in M : x < y.$$

Věta 1 (zavedení reálných čisel)**.** *Existuje uspořádané těleso, kde každá neprázdná shora omezená množina má supremum. Takové těleso je v jistém smyslu (až na isomorfismus) jednoznačné. Budeme mu říkat těleso reálných čisel a značit ho* $\mathbb{R}$. (Bez důkazu.)

Poznámka. *Nebudeme tedy rozebírat, jak přesně reálná čísla vypadají. Jedna z možností jsou obvyklé desetinné rozvoje (ale není úplně jasné, jak vůbec definovat třeba násobení, a jestli takové násobení vyjde asociativní. Jiný postup jsou tzv. Dedekindovy řezy.*
K zamyšlení: *Reálných čísel je více než přirozených. (Co to vlastně znamená?)*

Poznámka. *Značení:* $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}_0^+$, $\mathbb{R}_0^-$, *intervaly* (a, b), $[a, b)$, *atd.*

L Věta 2 (o existenci infima)**.** *Nechť* $M \subseteq \mathbb{R}$ *je neprázdná zdola omezená množina. Pak existuje* inf M.

L Věta 3 (Archimedova vlastnost)**.** *Ke každému* $x \in \mathbb{R}$ *existuje* $n \in \mathbb{N}$ *tak, že* $x < n$.

L Věta 4 (hustota $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$)**.** *Nechť* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Pak existují* $q \in \mathbb{Q}$ *a* $r \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ *tak, že* $q \in (a, b)$ *a* $r \in (a, b)$.

T Věta 5 (o n-té odmocnině)**.** *Nechť* $n \in \mathbb{N}$ *a* $x \in [0, \infty)$. *Pak existuje právě jedno* $y \in [0, \infty)$ *tak, že* $y^n = x$.

Pozorování 6 (trojúhelníková nerovnost)**.** $(\forall x, y \in \mathbb{R})|x + y| \leq |x| + |y|$

II. Posloupnosti

2.1. Úvod

Definice. Posloupnost reálných čísel *je zobrazení* $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. *Místo* $a(n)$ *píšeme však* a_n, *celou posloupnost značíme* $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$, *nebo jen* (a_n).

Poznámka. *1. Definice i mnohé věty fungují stejně i pro komplexní čísla, my se povětšinou omezíme na čísla reálná.*
2. Časem se ukáže, že je šikovné uvažovat i tzv. zobecněné posloupnosti, tj. posloupnosti, které nemusí být v konečně mnoha bodech definovány. (Např. $a_n = 1/(n-211)$ *nepopisuje posloupnost, neboť* a_{211} *není definováno.)Ř*

Definice. *Řekneme, že posloupnost* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *je* omezená, *jestliže množina členů posloupnosti, tj. množina* $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *je omezená podmnožina* $\mathbb{R}$. *Analogicky definujeme* omezenost shora *a* omezenost zdola.

Definice. *Řekneme, že posloupnost* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *je:*

- klesající*, jestliže* $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n > a_{n+1}$,
- rostoucí*, jestliže* $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n < a_{n+1}$.
- neklesající*, jestliže* $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \le a_{n+1}$,
- nerostoucí*, jestliže* $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \ge a_{n+1}$,

Poznámka. *Posloupnost* (a_n) *je rostoucí právě když* $(\forall m < n) a_m < a_n$.

2.2. Vlastní limita posloupnosti

Definice. *Nechť* $A \in \mathbb{R}$ *a* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost. Řekneme, že* A *je* (vlastní) limitou *posloupnosti* (a_n)*, jestliže*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0,\ n \in \mathbb{N}\ : |a_n - A| < \varepsilon\,.$$

Značíme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.
Posloupnost, která má (vlastní) limitu, nazýváme konvergentní *posloupnost.*

Poznámka. *1. V definici lze ekvivalentně psát* $\ldots n > n_0 \ldots$ *a také* $|a_n - A| \le \varepsilon$
2. Také lze ekvivalentně psát $|a_n - A| < 2\varepsilon$*, nebo obecněji* $|a_n - A| < K\varepsilon$*, pro jakoukoli kladnou konstantu* K*. (Pozor, důležité!)*
3. Limita nezáleží na počátku – pokud změníme konečně mnoho členů posloupnosti, limita se nezmění.
4. Dokonce pro zjištění existence (a hodnoty) limity posloupnosti prvních (např.) sto členů vůbec nepotřebujeme, můžeme tedy definovat i limitu zobecněné posloupnosti, která pro konečně mnoho členů není vůbec definována.

Příklad. *(1)* $1 - 1/n$, *(2)* $(-1)^n$ *(3)* n

L Věta 1 (jednoznačnost vlastní limity)**.** *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

L Věta 2 (omezenost konvergentní posloupnosti)**.** *Nechť* (a_n) *má vlastní limitu. Pak je* (a_n) *omezená.*

Definice. *Řekneme, že posloupnost* $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *je vybraná z posloupnosti* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, jestliže existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel* $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ *tak, že* $b_k = a_{n_k}$.

K zamyšlení: *Je možné, aby byla posloupnost* (b_n) *vybraná z* (a_n) *a také naopak —* (a_n) *vybraná z* (b_n) *— aniž by byly obě posloupnosti identické?*

L Věta 3 (o limitě vybrané posloupnosti)**.** *Nechť* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ *a nechť* (b_k) *je vybraná z* (a_n)*. Pak* $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = A$.

T Věta 4 (aritmetika limit)**.** *Nechť* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$*. Pak platí*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = AB$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = A/B$ *pokud* $B \ne 0$

Poznámka. *1. Je možné, že* $\lim a_n$ *ani* $\lim b_n$ *neexistuje, avšak* $\lim(a_n + b_n)$ *ano!* *(*$b_n = -a_n$*,* a_n *"divoká"). Podobně v ostatních případech.*
2. V třetí části chápeme posloupnost a_n/b_n *v zobecněném smyslu (zmíněném po definici posloupnosti). Pokud je* $b_n = 0$ *pro nějaké* n*, pak pro toto* n *není výraz* a_n/b_n *definován. Ovšem pokud* $\lim b_n \neq 0$*, tak se toto může stát jen pro konečně mnoho hodnot* n*.*

L Věta 5 (limita a uspořádání)**.** *Nechť* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$*,* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$*.*
(i) Jestliže $A < B$*, pak existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$*, že pro každé* $n \geq n_0$ *platí* $a_n < b_n$*.*
(ii) Jestliže existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $n \geq n_0$ *platí* $a_n \geq b_n$*, pak* $A \geq B$*.*

L Věta 6 (o dvou strážnících)**.** *Nechť* (a_n)*,* (b_n)*,* (c_n) *jsou posloupnosti splňující:*
(i) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :\ a_n \leq c_n \leq b_n$*,*
(ii) $\lim a_n = \lim b_n = A \in \mathbb{R}$*.*
Pak $\lim c_n = A$*.*

L Věta 7 (o limitě součinu omezené a mizející posloupnosti)**.** *Nechť* $\lim a_n = 0$ *a* (b_n) *je omezená. Pak* $\lim a_n b_n = 0$*.*

(Předchozí věta byla o přednášku později, ale logicky patří sem.)

Příklad. $\lim 1/n^a$ *(pro a racionální),* $\lim q^n$, $\lim \frac{n^2+11}{n^3+2n^2}$, $\lim \sqrt[n]{a}$, $\lim \sqrt[n]{n}$, $\lim q^n/n^k$

2.3. Nevlastní limita posloupnosti

Definice. *Řekneme, že posloupnost* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *má* (nevlastní) limitu $+\infty$ *(respektive* $-\infty$*), pokud :*

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0,\ n \in \mathbb{N} :\ a_n > K$$

$$(\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0,\ n \in \mathbb{N} :\ a_n < K).$$

Věty 1, 3, 5 a 6 platí i v případě, že uvažujeme nevlastní limity.

Definice. Rozšířená reálná osa *je množina* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ *s následujícími vlastnostmi:*

Uspořádání:	$\forall a \in \mathbb{R}$	$-\infty < a < \infty$
Absolutní hodnota:		$\lvert +\infty\rvert = \lvert -\infty\rvert = +\infty$
Sčítání:	$\forall a \in \mathbb{R}^* \setminus \{+\infty\}$	$-\infty + a = -\infty$
	$\forall a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty\}$	$+\infty + a = +\infty$
Násobení:	$\forall a \in \mathbb{R}^*,\ a > 0$	$a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$
	$\forall a \in \mathbb{R}^*,\ a < 0$	$a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$
Dělení:	$\forall a \in \mathbb{R}$	$\dfrac{a}{\pm\infty} = 0.$

Výrazy $-\infty + \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{cokoli}{0}$ *nejsou definovány.*

Věta 4 (aritmetika limit podruhé)**.** *Nechť* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$*. Pak platí*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$*, MLPSS*
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = AB$*, MLPSS*
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = A/B$*, MLPSS*

(MLPSS značí “má-li pravá strana smysl”: tj. výraz na pravé straně je definován.)
(Bez důkazu.)

K zamyšlení: *Pokud výraz na pravé straně smysl nemá, tak nejenže nevíme, čemu je rovna (a zda existuje) limita na levé straně, ale dokonce se tato limita může rovnat čemukoli (nebo neexistovat). Hmm, s jedinou výjimkou, v jednom nedefinovaném případě můžeme něco málo říct – ve kterém a co?*

Definice. *Pro libovolnou množinu $M \subseteq \mathbb{R}$ definujme $\sup M$ jako nejmenší horní závoru (i nekonečnou) — přesněji, $\sup M$ je minimální prvek množiny*

$$\{x \in \mathbb{R}^* : (\forall m \in M) x \geq m\}.$$

Analogicky definujeme $\inf M$ coby maximální prvek množiny

$$\{x \in \mathbb{R}^* : (\forall m \in M) x \leq m\}.$$

Poznámka. *1. Pokud je M omezená shora, tak tato definice suprema M splývá s definicí v druhé přednášce. (***K zamyšlení:** *Proč?)*
2. Pokud je M shora neomezená, tak jedinou horní závorou je $+\infty$, takže $\sup M = +\infty$.
3. Analogicky pro infima. V souhrnu dostáváme, že připustíme-li nekonečné hodnoty, má každá množina reálných čísel supremum i infimum.
4. **K zamyšlení:** *Kolik je $\sup \emptyset$ a $\inf \emptyset$?*

L Věta 8 (limita typu $A/0$)**.** *Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $b_n > 0$. Pak $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$.*

2.4. Monotónní posloupnosti

L Věta 9 (o limitě monotónní posloupnosti)**.** *Každá monotónní posloupnost má limitu.*

Příklad. *Takto lze např. odvodit, že posloupnost definovaná předpisem $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (a_n + 2/a_n)/2$ (pro každé $n \geq 1$) má limitu, podle věty o aritmetice limit se dopočte, že $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.*

Definice. *Nechť $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost a označme $b_k = \sup\{a_n : n \geq k\}$ a $c_k = \inf\{a_n : n \geq k\}$. Číslo $\lim_{k\to\infty} b_k$ nazýváme* limes superior *posloupnosti $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a značíme $\limsup_{n\to\infty} a_n$. Číslo $\lim_{k\to\infty} c_k$ nazýváme* limes inferior *posloupnosti $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a značíme $\liminf_{n\to\infty} a_n$.*

Poznámka. *(1) Je-li (a_n) shora (zdola) neomezená, pak vyjde $b_k = \infty$ ($c_k = -\infty$). V tom případě klademe $\lim_{k\to\infty} b_k = \infty$ ($\lim_{k\to\infty} c_k = -\infty$).*
(2) Protože (b_k) je nerostoucí a (c_k) neklesající, tak podle předchozí věty limes superior a limes inferior existuje pro každou posloupnost.

Příklad. $\limsup_{n\to\infty} (-1)^n + 1/n = 1$, $\liminf_{n\to\infty} (-1)^n + 1/n = -1$, $\limsup_{n\to\infty} n = \liminf_{n\to\infty} n = \infty$

T Věta 10 (vztah limity, limes superior a limes inferior)**.** *Nechť (a_n) je posloupnost, $A \in \mathbb{R}^*$. Pak*

$$\lim a_n = A \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*.$$

T Věta 11 (Bolzano–Weierstrass)**.** *Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.*

T Věta 12 (BC podmínka)**.** *Posloupnost* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *má vlastní limitu, právě když splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku, tedy*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,\ m \geq n_0 : \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

III. Řady

3.1. Úvod

Definice. *Nechť* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *je posloupnost. Číslo* $s_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$ *nazveme* m*-*tým částečným součtem *řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Součtem *nekonečné řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *nazveme limitu posloupnosti* $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$*, pokud tato limita existuje. Je-li tato limita konečná, pak řekneme, že řada je* konvergentní*. Je-li tato limita nekonečná nebo neexistuje, pak řekneme, že řada je* divergentní*. Tuto limitu budeme značit* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*.*

Příklad. *Pokud* $a_n = q^n$*, je* $s_m = \frac{q^{m+1}-q}{q-1}$*. Snadno spočteme limitu posloupnosti* (s_m)*, a tím zjistíme, že*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{q}{1-q} & |q| < 1 \\ \infty & q > 1 \\ neex. & jinak \end{cases}$$

Poznámka. *Při počítání součtů řad podle definice narazíme na dva problémy: částečné součty může být těžké hezky vyjádřit a (proto) může být obtížné zjistit jejich limitu. Existují rafinovanější metody (metodu mírně rafinovanou si ukážeme příště), pro jejich aplikaci bude ale potřeba vědět, zda daný součet vůbec existuje (a je konečný), neboli zda řada konverguje. Tím se budeme teď (takřka) výhradně zabývat.*

L Věta 1 (nutná podmínka konvergence)**.** *Jestliže je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní, pak* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$*.*

Poznámka. *Tato podmínka rozhodně NENÍ postačující: např.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ *(jak brzy uvidíme), třebaže* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$*.*

L Věta 2 (linearita řad)**.** *(i) Nechť* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*, pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n \text{ konverguje}.$$

Navíc, pokud obě řady konvergují, tak $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$*.*
(ii) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje, pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \text{ konverguje.}$$

Navíc, pokud řady konvergují, tak $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$*.*

3.2. Řady s nezápornými členy

Poznámka. *Pro řady s nezápornými členy podle věty II.9 limita částečných součtů existuje, jde tedy "jen" o to, zda tato limita je konečná (řada konverguje) nebo nekonečná (řada diverguje).*

L Věta 3 (srovnávací kritérium). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tak, že pro všechna* $n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$ *platí* $a_n \leq b_n$. *Pak*

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ konverguje } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje},$$

$$(ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ diverguje } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ diverguje}.$$

L Věta 4 (limitní srovnávací kritérium). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a nechť* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K \in \mathbb{R}^*$. *Pak*

$$(i)\ \textit{Jestliže } K \in (0, \infty),\ \textit{pak } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ konverguje } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje},$$

$$(ii)\ \textit{Jestliže } K = 0,\ \textit{pak } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ konverguje } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje},$$

$$(ii)\ \textit{Jestliže } K = \infty,\ \textit{pak } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ konverguje}.$$

L Věta 5 (Cauchyovo odmocninové kritérium). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy.*

$$(i)\ \exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :\ \sqrt[n]{a_n} < q \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje},$$

$$(ii)\ \exists q > 1\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :\ \sqrt[n]{a_n} > q \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ diverguje},$$

$$(iii)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje},$$

$$(iv)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ diverguje},$$

K zamyšlení: *V částech (iii) a (iv) lze místo* lim *psát* lim sup.

L Věta 6 (d'Alambertovo podílové kritérium). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy.*

$$(i)\ \exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :\ \frac{a_{n+1}}{a_n} < q \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje},$$

$$(ii)\ \exists q > 1\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :\ \frac{a_{n+1}}{a_n} > q \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ diverguje},$$

$$(iii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ konverguje},$$

$$(iv)\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ diverguje}.$$

K zamyšlení: *V části (iii) lze místo* lim *psát* lim sup.
K zamyšlení: *Lze říci, zda je lepší podílové nebo odmocninové kritérium?*

Příklad. *Zkoumejme řady* $\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$. *(***K zamyšlení:** *Co tento součet říká o házení hrací kostkou?) Použijeme podílové kritérium (šlo by i odmocninové, s trochu těžší limitou. Máme*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n}\frac{5}{6}$$

a tedy $\lim a_{n+1}/a_n = 5/6 < 1$. *Proto má řada konečný součet, označme ho* S. *Můžeme ale dále počítat*

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k} + \frac{5}{6}\sum_{k=0}^{\infty} k)\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1/6}{1-5/6} + \frac{5}{6}S \end{aligned}$$

Odsud již snadno zjistíme, že $S = 6$.

Věta 7 (Raabeho kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy.*

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje,}$$

$$(ii)\ \lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje.}$$

(Bez důkazu.)

K zamyšlení: *Důkaz lze udělat srovnáním s řadou* $1/n^{\alpha}$.

T Věta 8 (kondenzační kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy splňující* $a_{n+1} \le a_n$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$. *Pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konverguje.}$$

Důsledek *Nechť* $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ *konverguje* $\Leftrightarrow \alpha > 1$.
2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^{\alpha} n}$ *konverguje* $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

K zamyšlení: *Jak je to s řadou* $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log\log n)^{\alpha}}$ *?*

3.3. Neabsolutní konvergence řad

Definice. *Nechť pro řadu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *platí, že* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *konveguje. Pak říkáme, že* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

L Věta 9 (Bolzano-Cauchyho podmínka pro konvergenci řad)**.** *Řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě tehdy, když je splněna následující podmínka*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ m \geq n_0,\ n \geq n_0 : \quad \Big| \sum_{j=n}^{m} a_j \Big| < \varepsilon.$$

L Věta 10 (vztah konvergence a absolutní konvergence)**.** *Nechť řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně. Pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

Lemma *(Abelova parciální sumace)*. Nechť $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Označme $s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$. Pak platí

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} s_i (b_i - b_{i+1}) + s_n b_n.$$

Jestliže navíc $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq 0$, pak

$$b_1 \min s_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq b_1 \max s_i.$$

(důkaz snadnou indukcí – ale z časových důvodů vynechán)

T Věta 11 (Abel-Dirichletovo kritérium)**.** *Nechť* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *je posloupnost reálných čísel a* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Jestliže je některá z následujících podmínek splněna, pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konvergentní.*

$$\text{(A)}\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ je konvergentní,}$$

$$\text{(D)}\ \lim_{n \to \infty} b_n = 0 \text{ a } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ má omezené častečné součty, tedy}$$

$$\exists K > 0\ \forall m \in \mathbb{N} : \quad |s_m| = \Big| \sum_{i=1}^{m} a_i \Big| < K.$$

(v důkazu vynechány technické detaily)

L Věta 12 (Leibnitz)**.** *Nechť* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n \text{ konverguje } \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} b_n = 0.$$

(dk byl až na další přednášce)

Poznámka. *Vlastnost "*b_n *je klesající posloupnost s limitou 0" značíme* $b_n \searrow 0$.

Poznámka. *(1) Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je absolutně konvergentní řada. Pak po libovolné změně pořadí jejích členů dostaneme absolutně konvergentní řadu (kterou můžeme formálně zapsat* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$*, pro nějakou bijekci* $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*) se stejným součtem.*
(2) Naproti tomu pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, avšak nikoliv absolutně (tj.* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$*), pak změnou pořadí jejích členů lze dostat libovolný součet z* $\mathbb{R}^*$*.*

3.4. Součin řad

Tak jako pro konečné součty bychom i pro součty nekonečné (řady) chtěli používat distributivitu (roznásobování závorek). Je ale potřeba se rozhodnout, v jakém pořadí budeme jednotlivé členy sčítat.

Definice. *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady.* Cauchyovským součinem *těchto řad nazveme řadu*

$$\sum_{k=2}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{k-1} a_{k-i}b_i\Big).$$

Věta 13 (o součinu řad). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergují absolutně. Pak*

$$\sum_{k=2}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{k-1} a_{k-i}b_i\Big) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big)\cdot\Big(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\Big).$$

(Bez důkazu.)

IV. Funkce jedné reálné proměnné

4.1. Základní definice

Definice. Funkcí jedné reálné proměnné *rozumíme zobrazení* $f : M \to \mathbb{R}$, *kde* $M \subseteq \mathbb{R}$. *Množina* M *se nazývá* definiční obor *funkce* f *a značí* D_f.

Definice. *Řekneme, že funkce* $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$, *je*

rostoucí, *jestliže* $\forall x, y \in M,\ x < y : \quad f(x) < f(y)$,

klesající, *jestliže* $\forall x, y \in M,\ x < y : \quad f(x) > f(y)$,

nerostoucí, *jestliže* $\forall x, y \in M,\ x < y : \quad f(x) \geq f(y)$,

neklesající, *jestliže* $\forall x, y \in M,\ x < y : \quad f(x) \leq f(y)$.

Definice. *Řekneme, že funkce* $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$, *je*

sudá, *jestliže* $\forall x \in M : \quad -x \in M \ \ \&\ \ f(x) = f(-x)$,

lichá, *jestliže* $\forall x \in M : \quad -x \in M \ \ \&\ \ (f(x) = -f(-x))$,

periodická, *jestliže*

$$\exists p > 0\ \forall x \in M : \quad x + p \in M \ \ \&\ \ x - p \in M \ \ \&\ \ f(x) = f(x + p)\,.$$

Definice. *Řekneme, že funkce* $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$, *je* omezená *(*omezená shora, omezená zdola*), jestliže* $f(M)$ *je omezená (shora omezená, zdola omezená) podmnožina* $\mathbb{R}$. *Symbolem* $f(M)$, *nebo také* H_f *značíme* množinu hodnot funkce f, *tj. množinu* $\{f(x) : x \in M\}$.

Definice. *Nechť* $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$. *Řekneme, že funkce* f *nabývá v bodě* $a \in M$

maxima na M *jestliže* $\forall x \in M :\ f(x) \leq f(a)$,

minima na M *jestliže* $\forall x \in M :\ f(x) \geq f(a)$,

ostrého maxima na M *jestliže* $\forall x \in M,\ x \neq a :\ f(x) < f(a)$,

ostrého minima na M *jestliže* $\forall x \in M,\ x \neq a :\ f(x) > f(a)$, lokálního maxima (ostrého lokálního maxima, ostrého lokálního minima, lokálního minima) na M *jestliže existuje* $\delta > 0$ *tak, že* f *nabývá na* $M \cap (a-\delta, a+\delta)$ *svého maxima (ostrého maxima, ostrého minima, minima).*

K zamyšlení: *Může nějaká funkce nabývat lokálního minima v každém bodě definičního oboru? Ostrého lokálního minima? Co když chceme, aby funkce byla definovaná na celém* $\mathbb{R}$*? (Pozor, poslední část je těžká!)*

Definice. *Buďte* $f : M \to \mathbb{R}$ *a* $g : N \to \mathbb{R}$ *funkce,* $M, N \subseteq \mathbb{R}$*. Složením těchto funkcí myslíme funkci* $h : N' \to \mathbb{R}$*, kde*

1. $h(x) = f(g(x))$ *pro všechna* $x \in N'$
2. $N' = \{x \in N : g(x) \in M\}$

Definice. *Nechť* f *je funkce a* J *je interval. Řekneme, že* f *je* prostá na J*, jestliže pro všechna* $x, y \in J$ *platí* $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$*. Pro prostou funkci* $f : J \to \mathbb{R}$ *definujeme* funkci inverzní $f^{-1} : f(J) \to \mathbb{R}$ *předpisem* $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$*.*

4.2. Elementární funkce

Po trochu suchých definicích si pořádně zaveďme "běžné" – tzv. elementární – *funkce. Zatím jsme si nedefinovali limitu funkce ani spojitost, tyto body zatím prosím chápejte intuitivně (a vraťte se k nim, až limity a spojitost probereme).*

Věta 14 (zavedení exponenciály)**.** *Existuje právě jedna funkce* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující:*

1. $\exp(x)$ *je rostoucí na* $\mathbb{R}$,
2. $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$,
3. $\exp(0) = 1$,
4. $H_{\exp} = (0, \infty)$,
5. $\exp$ *je spojitá*
6. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$.

(Bez důkazu.)

Definice. *Funkci inverzní k exponenciále* exp *nazýváme* logaritmus log.

Věta 15 (vlastnosti logaritmu)**.** *Funkce* log *splňuje:*

1. $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *je spojitá rostoucí funkce,*
2. $\forall x, y > 0 \quad \log(xy) = \log(x) + \log(y)$,
3. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\log(x)}{x-1} = 1$.

(Bez důkazu.)

Definice. *Nechť* $a > 0$ *a* $b \in \mathbb{R}$*. Pak definujeme* $a^b = \exp(b \log(a))$*. Je-li* $b > 0$ *pak definujeme* $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$*.*

Poznámka. *(1) Umocňování má všechny "očekávané" vlastnosti, tj. např.* $\log(a^b) = b \log a$*,* $a^{bc} = (a^b)^c$*,* $a^{b+c} = a^b a^c$*,* $a^0 = 1$*,* $a^1 = a$ *(vše pro* $a > 0$*, jinak obecnou mocninu nemáme definovanou). Uvědomte si, že odsud plyne, že* a^n *a* $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ *je definováno tak, jako dříve.*

(2) Označíme-li $e = exp(1)$, pak $\log e = 1$ a podle definice je $e^x = \exp(x \cdot 1) = \exp(x)$. Číslo $e \doteq 2.718\,281\,828\ldots$ se nazývá Eulerovo číslo. Kromě tohoto vztahu s exponenciálou je e také hodnota limity

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

a řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,.$$

Věta 16 (zavedení sinu a cosinu)**.** *Existují funkce* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující:*

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$
   $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$
   $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \cos(-x) = \cos x,\ \sin(-x) = -\sin x,$
2. *existuje kladné číslo π tak, že* $\sin$ *je rostoucí na* $[0, \frac{1}{2}\pi]$ *a* $\sin(\frac{1}{2}\pi) = 1$,
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Funkce $\sin$ *a* $\cos$ *(a číslo π) jsou těmito vztahy určeny jednoznačně.*
(Bez důkazu.)

Poznámka. *Odsud již plynou všechny ostatní vlastnosti funkcí sinus a cosinus, tj. např. vzorec pro* $\sin(2x)$, $\cos x/2$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, *atd.*

Definice. *Pro* $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}$ *a* $y \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ *definujeme funkce* tangens *a* cotangens *předpisem*

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \ \text{ a } \ \operatorname{cotg} y = \frac{\cos y}{\sin y}.$$

Věta 17 (spojitost sinu a cosinu)**.** *Funkce* sin, cos, tg *a* cotg *jsou spojité na svém definičním oboru.*
(Bez důkazu.)

Definice. *Nechť*

$$\begin{aligned} \sin^* x &= \sin x \ \text{ pro } x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}], \\ \cos^* x &= \cos x \ \text{ pro } x \in [0, \pi], \\ \operatorname{tg}^* x &= \operatorname{tg} x \ \text{ pro } x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \ \text{ a} \\ \operatorname{cotg}^* x &= \operatorname{cotg} x \ \text{ pro } x \in (0, \pi). \end{aligned}$$

Definujeme arcsin *(respektive* arccos, arctg, arccotg*) jako inverzní funkci k funkci* $\sin^*$ *(respektive* $\cos^*$, tg^*, cotg^**).*

K zamyšlení: *Rozmyslete si, čemu se rovná* $\sin \arcsin x$ *a čemu* $\arcsin \sin x$.

Poznámka. *Asi jste si všimli, že věty jsou bez důkazů – vlastně jsme jen řekli, jak chceme, aby se elementarní funkce chovaly. Některé důkazy si časem ukážeme (některé až v letním semestru), zde jen pro zajímavost naznačme, jak se dělají:*

- *Položíme* $exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- *Vlastnosti logaritmu odvodíme z toho, že se jedná o inverzní funkci k* exp.

- *Položíme* $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ *a* $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$. *(Zde vybočujeme z rámce zkoumání funkcí (řad, ...) s reálnými hodnotami, ovšem pro komplexní čísla většina toho, co jsme si na přednášce říkali, platí beze změny.)*
- *Poznamenejme, že obdobně se definují tzv. hyperbolické funkce sinus hyperbolický a cosinus hyperbolický.* $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ *a* $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$. *(Tyto funkce se nazývají hyperbolické neboť se k rovnoosé hyperbole ($x \mapsto 1/x$) mají tak, jak goniometrické funkce (sinus a spol.) ke kružnici.*

Poznámka. *Lze vytvářet (např. pomocí integrálů) i další významné funkce "méně elementární", tzv.* speciální funkce. *Takovými funkcemi se zabývat nebudeme (už proto, že zatím nevíme, co je integrál), ale v principu se s nimi zachází stejně jako se sinem a spol: pomocí metod, které brzy vybudujeme, zjistíme vlastnosti těchto funkcí a naučíme kalkulačky/počítače jak takovou funkci spočítat numericky. Zmiňme např. tzv. chybovou funkci, která je důležitá mj. ve statistice:*

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt\,.$$

4.2. Limity

Začněme pojmem, který popisuje, co to znamená "být blízko bodu a".

Definice. *Nechť* $\delta > 0$ *a* $a \in \mathbb{R}$. Prstencové okolí *bodu je*

$$P(a,\delta) = (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}; \quad P(+\infty,\delta) = (\tfrac{1}{\delta}, +\infty); \quad P(-\infty,\delta) = (-\infty, -\tfrac{1}{\delta}).$$

Pravé a levé prstencové okolí *bodu a je*

$$P_+(a,\delta) = (a, a+\delta); \quad P_-(a,\delta) = (a-\delta, a).$$

Okolí *bodu je*

$$U(a,\delta) = (a-\delta, a+\delta); \quad U(+\infty,\delta) = (\tfrac{1}{\delta}, +\infty); \quad U(-\infty,\delta) = (-\infty, -\tfrac{1}{\delta}).$$

Pravé a levé okolí *bodu a je*

$$U_+(a,\delta) = [a, a+\delta); \quad U_-(a,\delta) = (a-\delta, a].$$

Definice. *Nechť* $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$. *Řekneme, že f má v bodě* $a \in \mathbb{R}^*$ limitu *rovnou* $A \in \mathbb{R}^*$, *jestliže platí*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P(a,\delta) : \quad f(x) \in U(A,\varepsilon).$$

Značíme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Poznámka. *(1) Hlavní užitek v zavedení značení $P(a,\delta)$ apod. je možnost zkoumat najednou případy kdy a, A jsou reálná čísla a kdy jsou to $\pm\infty$. (***K zamyšlení:** *Kolik případů bychom jinak museli v definici rozlišit?) Pokud chceme nakreslit vhodný obrázek, pak ovšem musíme stejně případy rozlišovat.*
Další výhodou je možnost zobecnění, v části matematiky zvané topologie *se obecně zkoumá, jaké vlastnoti má mít "systém okolí" a jak pomocí takového systému nadefinovat spojitost i pro zobrazení mezi složitějšími objekty než jsou reálná čísla.*
(2) Ekvivalentně můžeme v definici limity psát

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ f(P(a,\delta)) \subseteq U(A,\varepsilon).$$

(3) Pokud je $a, A \in \mathbb{R}$, pak lze definici napsat také ve formě

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon\,.$$

(4) V definici limity $f : M \to \mathbb{R}$ v bodě a se nic nepraví o hodnotě $f(a)$, dokonce ani nemusí být $f(a)$ definováno (tj. $a \in M$). Co však chceme, je aby nějaké prstencové okolí *bodu a bylo celé v M (to plyne z definice: pokud říkáme, že $f(x)$ je prvkem nějaké množiny, říkáme tím implicitně též, že $f(x)$ je definováno).*
(5) Kdybychom předchozí varování ignorovali (definici limity lze poněkud rozšířit), dostali bychom pro funkce definované na $M = \mathbb{N}$ a pro $a = +\infty$ definici limity posloupnosti v novém jazyce.
(6) Jiné značení: $f(x) \xrightarrow{x\to a} A$.

Příklad. *(1) Pokud $f(x) = x$, pak je $\lim_{x\to a} f(x) = a$ pro každé $a \in \mathbb{R}^*$. (V definici můžeme volit δ rovno ε.)*
(2) Pokud $f(x) = 1/|x|$, pak je $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$. (V definici můžeme opět volit δ rovno ε.)

Definice. *Nechť $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$* limitu zprava (zleva) *rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P_+(a, \delta) : \quad f(x) \in U(A, \varepsilon)$$

$$\big(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P_-(a, \delta) : \quad f(x) \in U(A, \varepsilon)\big).$$

Značíme $\lim_{x\to a_+} f(x) = A$ ($\lim_{x\to a_-} f(x) = A$) nebo stručněji $f(a_+) = A$ ($f(a_-) = A$).

Příklad. *Pokud $f(x) = 1/x$, pak je $\lim_{x\to 0_+} f(x) = +\infty$, zatímco $\lim_{x\to 0_-} f(x) = -\infty$.*

Definice. *Nechť $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$, $a \in M$. Řekneme, že f je v a* spojitá (spojitá zprava, spojitá zleva)*, jestliže*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\ \ (\lim_{x\to a_+} f(x) = f(a),\ \ \lim_{x\to a_-} f(x) = f(a)).$$

T Věta 1 (Heineho věta)**.** *Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $f : M \to \mathbb{R}$ a f je definována na prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

(ii) pro každou posloupnost $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takovou, že
$\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in M, x_n \neq a\ \ \&\ \ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *platí* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

L Věta 2 (o jednoznačnosti limity)**.** *Funkce f má v daném bodě nejvýše jednu limitu.*

(Následující věta byla až na další přednášce.)

L Věta 3 (limita a omezenost)**.** *Nechť f má vlastní limitu v bodě $a \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že f je na $P(a, \delta)$ omezená.*

L Věta 4 (o aritmetice limit)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$. Pak platí*

(i) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz $A + B$ definován*

(ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz AB definován*

(iii) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, *pokud je výraz $\dfrac{A}{B}$ definován.*

L Důsledek Věty 4: *Nechť jsou funkce f a g spojité v bodě $a \in \mathbb{R}$. Pak jsou funkce $f+g$, $f \cdot g$ spojité v a. Pokud je navíc $g(a) \neq 0$, pak je i funkce $\frac{f}{g}$ spojitá v a.*

Příklad. *Funkce daná předpisem $f(x) = x$ je spojitá (její limitu jsme už počítali), stejně jako konstantní funkce. Odsud plyne, že jsou spojité i všechny polynomy a racionální lomené funkce (v bodech, kde jsou definované). Elementární funkce jsou též definovány jako spojité (s výjimkou* tg *a* cotg, *které mají předepsané body nespojitosti.*

L Věta 5 (o dvou strážnících)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$. Nechť na nějakém prstencovém okolí $P(a,\delta)$ platí $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$. Pak existuje $\lim_{x\to a} h(x)$ a všechny tři limity se rovnají.*

T Věta 6 (limita složené funkce)**.** *Nechť funkce f a g splňují:*

$$(i) \lim_{x\to c} g(x) = A,$$
$$(ii) \lim_{y\to A} f(y) = B.$$

Je-li navíc splněna alespoň jedna z podmínek

$$(P1)\ f \text{ je spojitá v } A,$$
$$(P2)\ \exists \eta > 0\ \forall x \in P(c,\eta):\ g(x) \neq A,$$

pak platí $\lim_{x\to c} f(g(x)) = B$.

Příklad. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2}$

Věta 7 (limita monotónní funkce)**.** *Nechť f je monotónní na intervalu (a,b), $a,b \in \mathbb{R}^*$. Potom existuje $\lim_{x\to a_+} f(x)$ i $\lim_{x\to b_-} f(x)$.*
(Bez důkazu.)

4.3. Funkce spojité na intervalu

Definice. *Vnitřními body intervalu J rozumíme ty body z J, které nejsou krajními. Množinu těchto bodů nazýváme vnitřek J (*$\operatorname{int} J$*).*

Definice. *Nechť f je funkce a J je interval. Řekneme, že f je spojitá na J, jestliže je spojitá ve všech vnitřních bodech J. Je-li počáteční bod J prvkem J, tak požadujeme i spojitost zprava v tomto bodě a je-li koncový bod J prvkem J, tak požadujeme i spojitost zleva v tomto bodě.*

T Věta 8 (Darboux)**.** *Nechť f je spojitá na intervalu $[a,b]$ a platí $f(a) < f(b)$. Pak pro každé $y \in (f(a), f(b))$ existuje $x \in (a,b)$ tak, že $f(x) = y$.*

Věta 9 (zobrazení intervalu spojitou funkcí)**.** *Nechť J je interval. Nechť funkce $f : J \to \mathbb{R}$ je spojitá. Pak je $f(J)$ interval.*
(Bez důkazu.)

T Věta 10 (spojitost funkce a nabývání extrémů)**.** *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a,b]$. Pak funkce f nabývá na $[a,b]$ svého maxima a minima.*

L Věta 11 (spojitost funkce a omezenost)**.** *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a,b]$. Pak je funkce f na $[a,b]$ omezená.*

T Věta 12 (o inverzní funkci)**.** *Nechť f je spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J. Potom je funkce f^{-1} spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.*

4.5. Derivace funkce

Definice. *Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Pak* derivací f v bodě a *budeme rozumět*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

derivací f v bodě a zprava *budeme rozumět*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0_+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

derivací f v bodě a zleva *budeme rozumět*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0_-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

L Věta 17 (vztah derivace a spojitosti)**.** *Nechť má funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ derivaci $f'(a) \in \mathbb{R}$. Pak je f v bodě a spojitá.*

T Věta 18 (aritmetika derivací)**.** *Nechť $f'(a)$ a $g'(a)$ existují.*

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$, *pokud má pravá strana smysl.*

(ii) Nechť je g spojitá v a, pak $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,
pokud má pravá strana smysl.

(iii) Nechť je g spojitá v a a $g(a) \neq 0$, pak $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$,
pokud má pravá strana smysl.

(Důkaz jen pro součet a součin.)

T Věta 19 (derivace složené funkce)**.** *Nechť f má derivaci v bodě y_0, g má derivaci v x_0 a je v x_0 spojitá a $y_0 = g(x_0)$. Pak*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0),$$

je-li výraz vpravo definován.
(Důkaz za předpokladu $g'(x_0) \neq 0$.)

L Věta 20 (derivace inverzní funkce)**.** *Nechť f je na intervalu (a,b) spojitá a rostoucí (respektive klesající). Nechť f má v bodě $x_0 \in (a,b)$ derivaci $f'(x_0)$ vlastní a různou od nuly. Potom má funkce f^{-1} derivaci v bodě $y_0 = f(x_0)$ a platí*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y_0)\big)}.$$

L Věta 21 (Fermatova)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$ je bod lokálního extrému funkce f na M. Pak $f'(a)$ neexistuje, nebo $f'(a) = 0$.*

L Věta 22 (Rolleova věta)**.** *Nechť f je spojitá na intervalu $[a,b]$, $f'(x)$ existuje pro každé $x \in (a,b)$ a $f(a) = f(b)$. Pak existuje $\xi \in (a,b)$ tak, že $f'(\xi) = 0$.*

L Věta 23 (Lagrangeova věta o střední hodnotě). *Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[a,b]$ a má derivaci v každém bodě intervalu (a,b). Pak existuje $\xi \in (a,b)$ tak, že*

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Věta 24 (l'Hospitalovo pravidlo).
(i) Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to a_+} f(x) = \lim_{x\to a_+} g(x) = 0$ a nechť existuje $\lim_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak

$$\lim_{x\to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(ii) Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to a_+} |g(x)| = \infty$ a nechť existuje $\lim_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak

$$\lim_{x\to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(Bez důkazu.)

L Věta 25 (derivace a limita derivace). *Nechť je funkce f spojitá zprava v a a nechť existuje $lim_{x\to a_+} f'(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Pak $f'_+(a) = A$.*

L Věta 26 (o vztahu derivace a monotonie). *Nechť $J \subseteq \mathbb{R}$ je interval a f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J má derivaci.*

(i) Je-li $f'(x) > 0$ na $\operatorname{int} J$, pak je f rostoucí na J.
(ii) Je-li $f'(x) < 0$ na $\operatorname{int} J$, pak je f klesající na J.
(iii) Je-li $f'(x) \geq 0$ na $\operatorname{int} J$, pak je f neklesající na J.
(iv) Je-li $f'(x) \leq 0$ na $\operatorname{int} J$, pak je f nerostoucí na J.

4.6. Konvexní a konkávní funkce

Definice. *Nechť f má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}$. Označme*

$$T_a = \{[x,y] : \ x \in \mathbb{R}, \ y = f(a) + f'(a)(x-a)\}.$$

Řekneme, že bod $[x, f(x)]$, $x \in D_f$ leží nad (pod) tečnou *T_a, jestliže platí*

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x-a) \quad \big(f(x) < f(a) + f'(a)(x-a)\big).$$

Definice. Druhá derivace *funkce f v bodě a ($f''(a)$) je derivace funkce $f'(x)$, čili*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}.$$

Definice. *Funkce f má v bodě a inflexi (a je inflexní bod), jestliže $f'(a) \in \mathbb{R}$ a existuje $\delta > 0$ tak, že*

(i) $\forall x \in (a-\delta, a) :$ $[x, f(x)]$ leží nad tečnou,
(ii) $\forall x \in (a, a+\delta) :$ $[x, f(x)]$ leží pod tečnou,

nebo

(i) $\forall x \in (a-\delta, a) :$ $[x, f(x)]$ leží pod tečnou,
(ii) $\forall x \in (a, a+\delta) :$ $[x, f(x)]$ leží nad tečnou,

Věta 27 (podmínky pro inflexi). *(1) (nutná) Nechť $f''(z) \neq 0$. Pak z není inflexní bod funkce f.*
(2) (postačující) Nechť f má spojitou první derivaci na intervalu (a, b). Nechť $z \in (a, b)$ a platí

$$\forall x \in (a, z) : f''(x) > 0 \text{ a } \forall x \in (z, b) : f''(x) < 0.$$

Pak z je inflexní bod f.
(Bez důkazu.)

Definice. *Funkce f na intervalu I nazveme* konvexní (konkávní)*, jestliže*

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

$$\Big(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}\Big).$$

Funkci nazveme ryze konvexní (ryze konkávní)*, je-li příslušná nerovnost ostrá.*

Věta 28 (vztah druhé derivace a konvexity (konkávity)). *Nechť f má na intervalu (a, b) spojitou první derivaci.*

$$\begin{aligned}
&\textit{Jestliže } \forall x \in (a, b): \ f''(x) > 0, \ \textit{pak } f \textit{ je ryze konvexní.}\\
&\textit{Jestliže } \forall x \in (a, b): \ f''(x) < 0, \ \textit{pak } f \textit{ je ryze konkávní.}\\
&\textit{Jestliže } \forall x \in (a, b): \ f''(x) \geq 0, \ \textit{pak } f \textit{ je konvexní.}\\
&\textit{Jestliže } \forall x \in (a, b): \ f''(x) \leq 0, \ \textit{pak } f \textit{ je konkávní.}
\end{aligned}$$

(Bez důkazu.)

4.7. Průběh funkce

Definice. *Řekneme, že funkce $x \mapsto ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, je* asymptotou funkce f v ∞ (resp. $-\infty$)*, jestliže*

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x) - (ax + b)\big) = 0 \quad (\textit{resp. } \lim_{x\to-\infty}\big(f(x) - (ax + b)\big) = 0).$$

L Věta 29 (tvar asymptoty). *Funkce f má v ∞ asymptotu $ax + b$, právě když*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \text{ a } \lim_{x\to\infty}\big(f(x) - ax\big) = b \in \mathbb{R}.$$

Při vyšetření průběhu funkce provádíme následující kroky:
1. Určíme definiční obor a obor spojitosti funkce.
2. Zjistíme průsečíky se souřadnými osami.
3. Zjistíme symetrii funkce: lichost, sudost, periodicitu.
4. Dopočítáme limity v krajních bodech definičního oboru a v bodech nespojitosti (pokud existují).
5. Spočteme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy.
6. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde je f konvexní nebo konkávní. Určíme inflexní body.
7. Vypočteme asymptoty funkce.
8. Načtneme graf funkce a určíme obor hodnot.

4.8. Taylorův polynom

Taylorův polynom **přesuneme do letního semestru***, kdybyste se nemohli dočkat (nebo kdybyste přešli do paralelky, kde to už brali), můžete si počíst. (U zkoušky nebude potřeba.)*

Definice. *Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$ a existuje vlastní n-tá derivace f v bodě a. Pak polynom*

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě a.

Věta 30 (o nejlepší aproximaci Taylorovým polynomem)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$ a P je polynom stupně nejvýše n. Pak*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0 \Leftrightarrow P = T_n^{f,a}.$$

Lemma. Nechť Q je polynom, $a \in \mathbb{R}$, $\operatorname{st} Q \leq n$ *a* $\lim_{x \to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$*. Pak* $Q \equiv 0$.

Věta 31 (Taylor)**.** *Nechť funkce f má vlastní $(n+1)$-ní derivaci v intervalu $[a, x]$, a nechť ϕ je spojitá funkce v $[a, x]$ a má vlastní derivaci v (a, x), která je v každém bodě tohoto intervalu různá od nuly. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ tak, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{\phi(x) - \phi(a)}{\phi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n.$$

Specielně existuje $\xi_1 \in (a, x)$ tak, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_1)(x-a)^{n+1} \text{ (Lagrangeův tvar zbytku)}$$

a existuje $\xi_2 \in (a, x)$ tak, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi_2)(x - \xi_2)^n (x-a) \text{ (Cauchyův tvar zbytku).}$$