11. cvičení z MA — 6. a 7.5.

Ještě vázané extrémy

1. Najděte extrémy funkce
(a) $f(x, y, z) = xyz$ pro $x + y + z = 0$ a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
(b) $f(x, y, z) = xy + yz$ pro $x^2 + y^2 = 2$, $y + z = 3$, $x, y, z > 0$.

2. Najděte extrémy kvadratické funkce $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} x_i x_j$ pro $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$. (Tuto úlohu znáte z lineární algebry, vyzkoušejte si, že Lagrangeovy multiplikátory vedou k cíli také.)

3. Tři rezistory o odporech R_1, R_2, R_3 jsou zapojeny paralelně. Jak se mezi ně rozdělí proud velikosti I, pokud věříme tomu, že rozdělení bude splňovat $I_1 + I_2 + I_3 = I$ a bude mít minimální energii $R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_2 I_2^2$.

4. Fermatův princip říká, že světlo si mezi dvěma body šíří trasou, která trvá nejkratší čas. Odvoďte odsud, jak se zlomí paprsek při přechodu mezi dvěma prostředími (přechod je rovina). (Pro jednotnost značení: rychlost světla v původním prostředí je v, v novém w, úhel mezi kolmicí k rovině přechodu a paprskem dopadajícím je α, paprskem zlomeným β.)

Metrické prostory

Koule v metrických prostorech

5. Pro $p \in [1, \infty)$ je na $\mathbb{R}^n$ dána metrika

$$\rho_p(x, y) = \|x - y\|_p = \left(|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p + \cdots + |x_n - y_n|^p\right)^{1/p},$$

kde $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Pro $p = \infty$ je tato metrika definována jako

$$\rho_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|\}.$$

Nakreslete v $\mathbb{R}^2$ (načrtněte) jednotkovou kouli se středem v počátku v této metrice
(a) pro $p = 1$,
(b) pro $p = 2$,
(c) pro $p = 3$,
(d) pro $p = \infty$.
(e) Jedná se o metriku pro $p = 2/3$?

6. Metriky ρ, σ na prostoru P se nazývají ekvivalentní, pokud existují konstanty c_1, $c_2 > 0$ tak, že pro všechna $x, y \in P$ platí

$$c_1 \rho(x, y) \le \sigma(x, y) \le c_2 \rho(x, y).$$

Ukažte, že metriky ρ_1, ρ_2, ρ_∞ (na $\mathbb{R}^n$) z minulého přikladu jsou ekvivalentní.

7. Pařížská metrika je metrika na $\mathbb{R}^n$ daná předpisem $\sigma(x, y) = \|x - y\|_2$, pokud x a y leží na stejné polopřímce vycházející z počátku a $\sigma(x, y) = \|x - 0\|_2 + \|0 - y\|_2$, pokud x a y neleží na stejné přímce vycházející z počátku.
(a) Dokažte, že $\mathbb{R}^n$ s metrikou σ je metrický prostor.
(b) Nakreslete (v $\mathbb{R}^2$) kouli s poloměrem 1 a středem v bodě $(1/2, 1/2)$ v této metrice.

8. Nechť $C[0, 1]$ značí množinu všech spojitých funkcí z intervalu $[0, 1]$ do $\mathbb{R}$. Pro dvě funkce $f, g \in C[0, 1]$ zavedeme $\theta(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}$.
(a) Dokažte, že $(C[0, 1], \theta)$ je metrický prostor.
(b) Popište jednotkovou kouli se středem ve funkci identická nula v tomto prostoru.

Vlastnosti metrických prostorů

9. Pro $p < 1$ definujme ρ_p analogicky jako v příkladu 1. Dokažte, že v takovém případě $(\mathbb{R}^n, \rho_p)$ není metrický prostor (například alespoň pro $p = \frac{1}{2}$).

10. Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Funkce $\sigma\colon X^2 \to \mathbb{R}$ je definována jako $\sigma(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$.
(a) Dokažte, že (X, σ) je metrický prostor.
(b) Nechť (Y, θ) je další metrický prostor. Dokažte, že funkce $f\colon X \to Y$ je spojitá jako funkce $(X, \rho) \to (Y, \theta)$, právě tehdy když je spojitá jako funkce $(X, \sigma) \to (Y, \theta)$.

11. Nechť ρ_2 je klasická euklidovská metrika na $\mathbb{R}^n$ (jako v příkladu 1) a σ je pařížská metrika.
(a) Rozhodněte, zda je identita spojitá funkce $(X, \sigma) \to (X, \rho_2)$.
(b) Rozhodněte, zda je identita spojitá funkce $(X, \rho_2) \to (X, \sigma)$.

12.
(a) Rozhodněte, zda jsou metrické prostory $(0, 1)$ a $[0, 1]$ homeomorfní (s obvyklou eukl. metrikou).
(b) Rozhodněte, zda jsou metrické prostory $(0, 1)$ a $\mathbb{R}$ homeomorfní.

13.
(a) Dokažte, že $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Q}^2$ nejsou izometrické metrické prostory.
(b) Dokažte, že $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Q}^2$ jsou homeomorfní metrické prostory (těžší).

Kompaktnost

14. Nechť $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je spojitá funkce. Dokažte, že množina $M = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 0\}$ je uzavřená množina.

15. Rozhodněte, zda následující množiny jsou kompaktní:
(a) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = 2009\}$,
(b) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - xy - y^2 = 0\}$,
(c) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$.

Geometrické aplikace kompaktnosti

16.
(a) Mezi všemi trojúhelníky s vrcholy na jednotkové kružnici najděte ten, který má největší obsah.
(b) Mezi všemi trojúhelníky jednotkového obvodu najděte ten, který má největší obsah.
(c) Mezi všemi n-úhelníky s vrcholy na jednotkové kružnici najděte ten, který má největší obsah.
(d) Mezi všemi konvexními n-úhelníky jednotkového obvodu najděte ten, který má největší obsah (těžší).