Barevnost grafů

Z. Dvořák

MFF UK

Plán

- vztah mezi barevností a maximálním stupněm (Brooksova věta)
- hranová barevnost (Vizingova věta)
- příště: vztah mezi barevností a klikovostí, perfektní grafy

Barevnost a maximální stupeň

Pozorování

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Důkaz indukcí:

- je-li $|V(G)| \leq 1$, tvrzení je triviální
- jinak, zvol $v \in V(G)$ libovolně:
  - z indukce, $\chi(G - v) \leq \Delta(G - v) + 1 \leq \Delta(G) + 1$
  - sousedi v používají nejvýše Δ různých barev $\Rightarrow$ v lze obarvit jednou z barev $1, \ldots, \Delta(G) + 1$.

Barevnost a maximální stupeň

Pozorování

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Tento odhad nejde vylepšit bez dalších předpokladů:

- $\Delta(K_n) = n - 1$, $\chi(K_n) = n$
- $\Delta(C_{2n+1}) = 2$, $\chi(C_{2n+1}) = 3$

Existují jiné (souvislé) protipříklady?

Neregulární grafy

Lemma

Je-li G souvislý a ne všechny jeho vrcholy mají stejný stupeň, pak $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Obdobně jako předchozí pozorování:

- můžeme předpokládat $|V(G)| \geq 2$; zvolme v stupně $\leq \Delta(G) - 1$
- nechť $G_1, \ldots, G_k$ jsou komponenty $G - v$:
  - G souvislý $\Rightarrow G_i$ obsahuje u_i tž. $u_i v \in E(G)$
  - $\deg_{G_i}(u_i) \leq \Delta(G) - 1$
    - je-li G_i regulární, pak $\chi(G_i) \leq \Delta(G_i) + 1 = \deg_{G_i}(u_i) + 1$
    - není-li regulární, pak $\chi(G_i) \leq \Delta(G_i)$ z indukce
  - proto $\chi(G_i) \leq \Delta(G)$
- v lze dobarvit jednou z barev $1, \ldots, \Delta(G)$

Neregulární grafy

Lemma

Je-li G souvislý a ne všechny jeho vrcholy mají stejný stupeň, pak $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

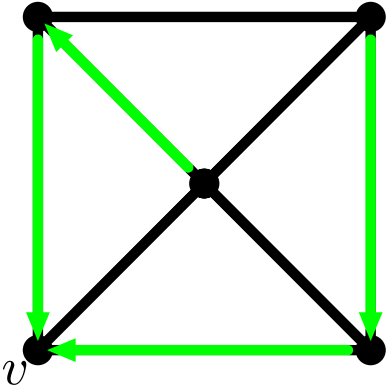
Jiný důkaz:

- zvolme kostru T grafu G
- zakořeníme T ve vrcholu v stupně $\leq \Delta(G) - 1$
- barvíme „od listů“ (obrácené pořadí průchodu T do hloubky)
    - vrchol $u \neq v$ má $\leq \deg(u) - 1$ předbarvených sousedů
    - vrchol v má $\deg(v) \leq \Delta(G) - 1$ předbarvených sousedů

Neregulární grafy

Lemma

Je-li G souvislý a ne všechny jeho vrcholy mají stejný stupeň, pak $\chi(G) \le \Delta(G)$.



Neregulární grafy

Lemma

Je-li G souvislý a ne všechny jeho vrcholy mají stejný stupeň, pak $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

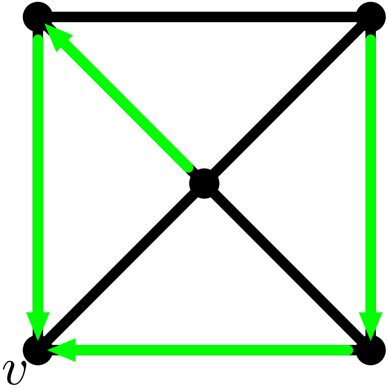
Jiný důkaz:

- zvolme kostru T grafu G
- zakořeníme T ve vrcholu v stupně $\leq \Delta(G) - 1$
- barvíme „od listů“ (obrácené pořadí průchodu T do hloubky)
  - vrchol $u \neq v$ má $\leq \deg(u) - 1$ předbarvených sousedů
  - vrchol v má $\deg(v) \leq \Delta(G) - 1$ předbarvených sousedů

Neregulární grafy

Lemma

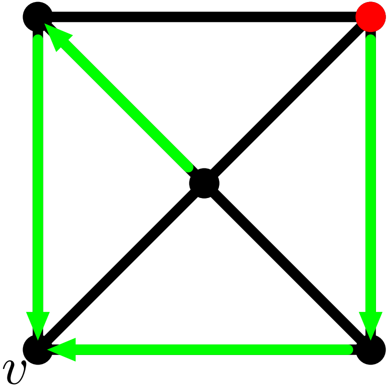
Je-li G souvislý a ne všechny jeho vrcholy mají stejný stupeň, pak $\chi(G) \leq \Delta(G)$.



Neregulární grafy

Lemma

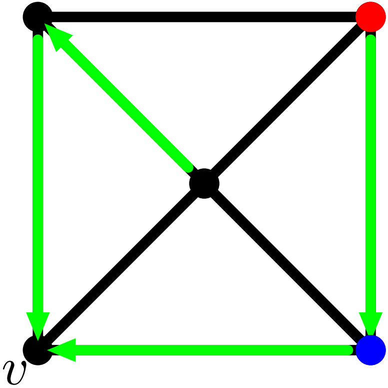
Je-li G souvislý a ne všechny jeho vrcholy mají stejný stupeň, pak $\chi(G) \leq \Delta(G)$.



Neregulární grafy

Lemma

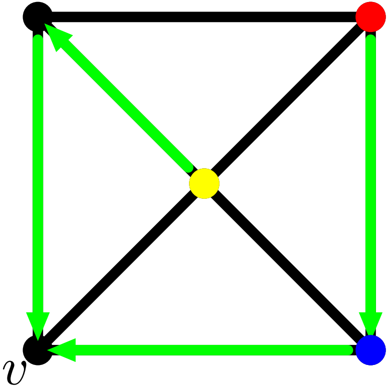
Je-li G souvislý a ne všechny jeho vrcholy mají stejný stupeň, pak $\chi(G) \leq \Delta(G)$.



Neregulární grafy

Lemma

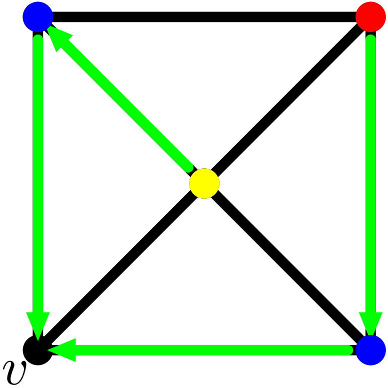
Je-li G souvislý a ne všechny jeho vrcholy mají stejný stupeň, pak $\chi(G) \leq \Delta(G)$.



Neregulární grafy

Lemma

Je-li G souvislý a ne všechny jeho vrcholy mají stejný stupeň, pak $\chi(G) \leq \Delta(G)$.



Neregulární grafy

Lemma

Je-li G souvislý a ne všechny jeho vrcholy mají stejný stupeň, pak $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

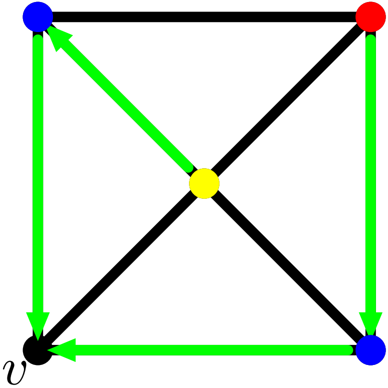
Jiný důkaz:

- zvolme kostru T grafu G
- zakořeníme T ve vrcholu v stupně $\leq \Delta(G) - 1$
- barvíme „od listů“ (obrácené pořadí průchodu T do hloubky)
  - vrchol $u \neq v$ má $\leq \deg(u) - 1$ předbarvených sousedů
  - vrchol v má $\deg(v) \leq \Delta(G) - 1$ předbarvených sousedů

Neregulární grafy

Lemma

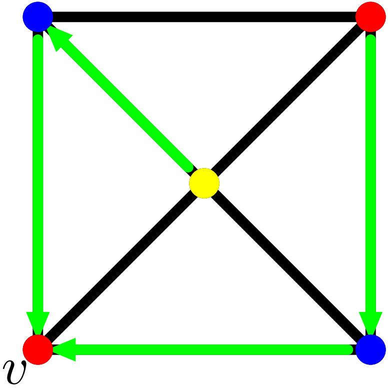
Je-li G souvislý a ne všechny jeho vrcholy mají stejný stupeň, pak $\chi(G) \leq \Delta(G)$.



Neregulární grafy

Lemma

Je-li G souvislý a ne všechny jeho vrcholy mají stejný stupeň, pak $\chi(G) \leq \Delta(G)$.



Lemma

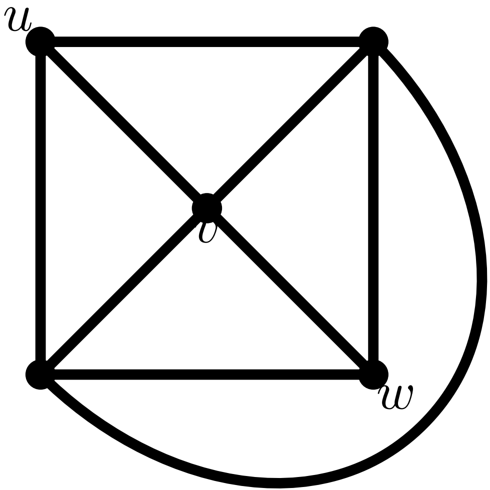
Je-li G 3-souvislý a není úplný, pak $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

- zvolme u, v, w tž. $uv, vw \in E(G)$, $uw \notin E(G)$
- T' kostra $G - \{u, w\}$ zakořeněná ve v
- $T = T' + \{u \to v, w \to v\}$
- nejprve obarvíme u a w stejnou barvou
- dále jako minule:
  - $u \neq v$ má $\leq \deg(u) - 1$ předbarvených sousedů
  - v má $\deg(v)$ předbarvených sousedů, ale u a w mají stejnou barvu

3-souvislé grafy

Lemma

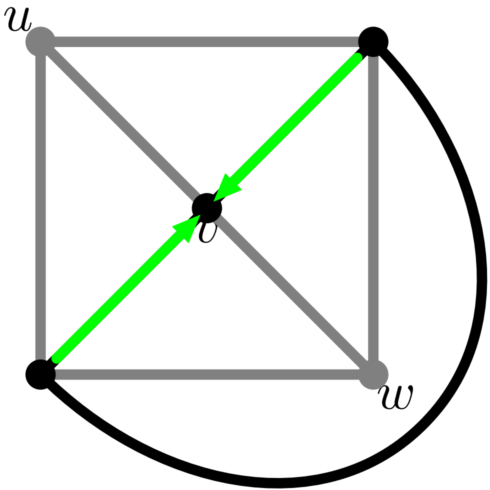
Je-li G 3-souvislý a není úplný, pak $\chi(G) \leq \Delta(G)$.



3-souvislé grafy

Lemma

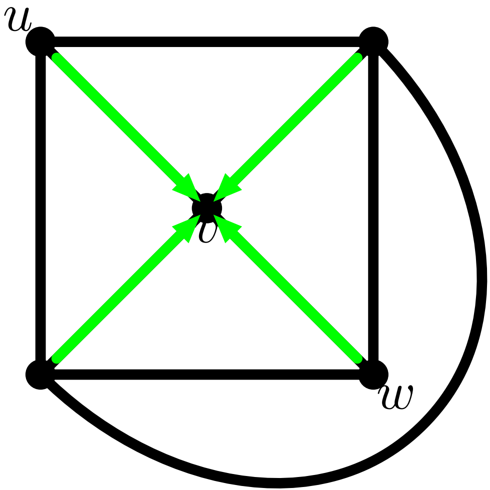
Je-li G 3-souvislý a není úplný, pak $\chi(G) \leq \Delta(G)$.



3-souvislé grafy

Lemma

Je-li G 3-souvislý a není úplný, pak $\chi(G) \leq \Delta(G)$.



3-souvislé grafy

Lemma

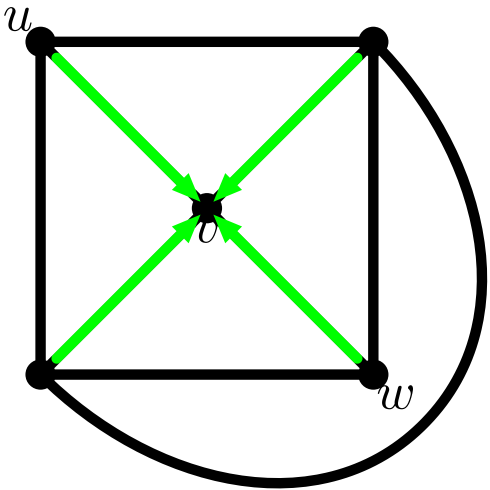
Je-li G 3-souvislý a není úplný, pak $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

- zvolme u, v, w tž. $uv, vw \in E(G)$, $uw \notin E(G)$
- T' kostra $G - \{u, w\}$ zakořeněná ve v
- $T = T' + \{u \to v, w \to v\}$
- nejprve obarvíme u a w stejnou barvou
- dále jako minule:
  - $u \neq v$ má $\leq \deg(u) - 1$ předbarvených sousedů
  - v má $\deg(v)$ předbarvených sousedů, ale u a w mají stejnou barvu

3-souvislé grafy

Lemma

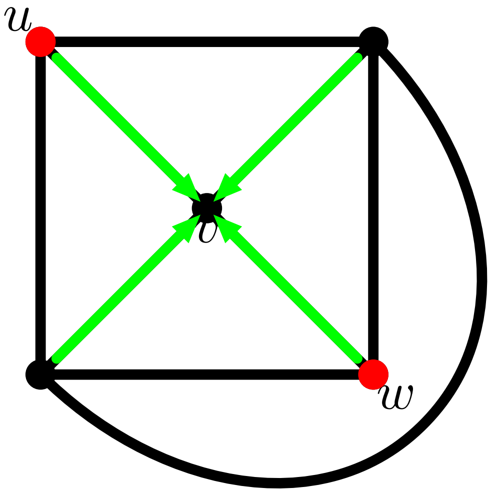
Je-li G 3-souvislý a není úplný, pak $\chi(G) \leq \Delta(G)$.



3-souvislé grafy

Lemma

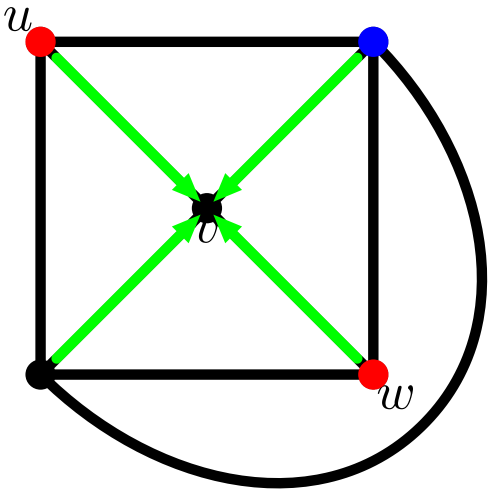
Je-li G 3-souvislý a není úplný, pak $\chi(G) \leq \Delta(G)$.



3-souvislé grafy

Lemma

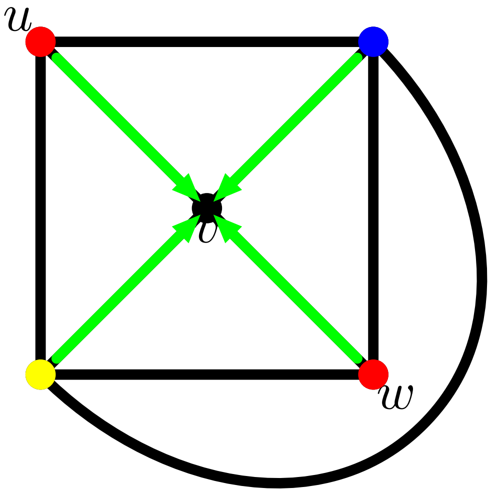
Je-li G 3-souvislý a není úplný, pak $\chi(G) \le \Delta(G)$.



3-souvislé grafy

Lemma

Je-li G 3-souvislý a není úplný, pak $\chi(G) \leq \Delta(G)$.



3-souvislé grafy

Lemma

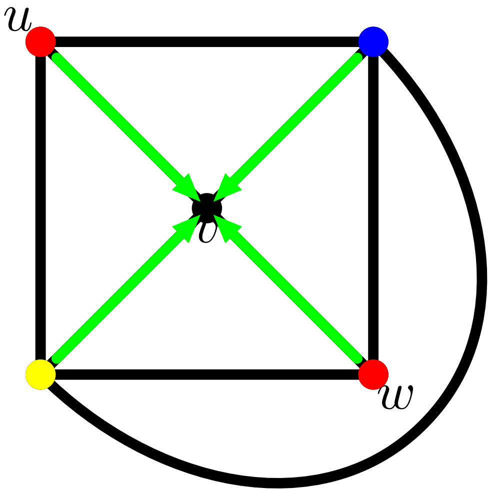
Je-li G 3-souvislý a není úplný, pak $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

- zvolme u, v, w tž. $uv, vw \in E(G)$, $uw \notin E(G)$
- T' kostra $G - \{u, w\}$ zakořeněná ve v
- $T = T' + \{u \to v, w \to v\}$
- nejprve obarvíme u a w stejnou barvou
- dále jako minule:
  - $u \neq v$ má $\leq \deg(u) - 1$ předbarvených sousedů
  - v má $\deg(v)$ předbarvených sousedů, ale u a w mají stejnou barvu

3-souvislé grafy

Lemma

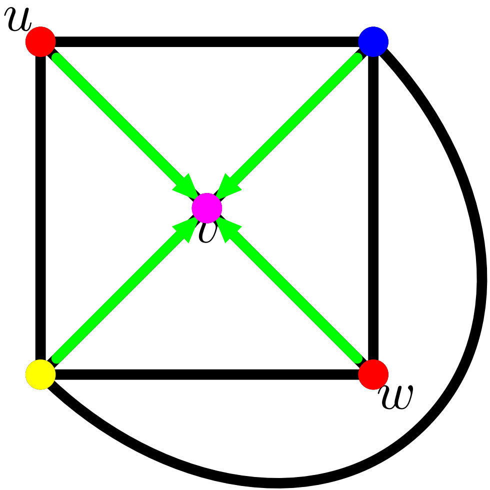
Je-li G 3-souvislý a není úplný, pak $\chi(G) \leq \Delta(G)$.



3-souvislé grafy

Lemma

Je-li G 3-souvislý a není úplný, pak $\chi(G) \leq \Delta(G)$.



Brooksova věta

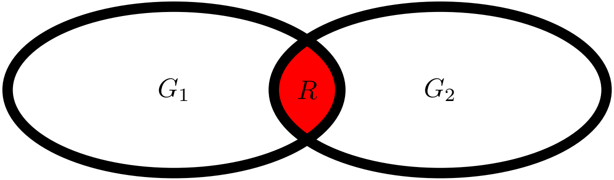
Věta

Je-li G souvislý a není ani úplný ani lichá kružnice, pak

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Důkaz:

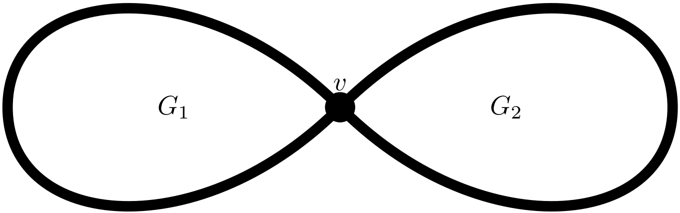
- BÚNO G je Δ-regulární a není 3-souvislý
- $\Delta > 3$ (jinak G je sudý cyklus nebo cesta délky alespoň 2 a $\chi(G) = \Delta = 2$)
- uvažme nejmenší řez R v G ($1 \leq |R| \leq 2$): $G = G_1 \cup G_2$, $V(G_1 \cap G_2) = R$



$|R| = 1$

Jestliže $R = \{v\}$:

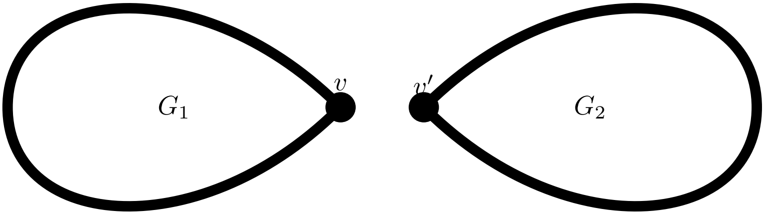
- obarvi G_1 a G_2 (nejsou Δ-regulární) Δ barvami
- přepermutuj obarvení tž. obě přiřazují v stejnou barvu



$|R| = 1$

Jestliže $R = \{v\}$:

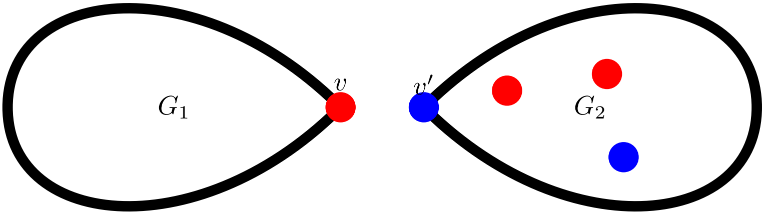
- obarvi G_1 a G_2 (nejsou Δ-regulární) Δ barvami
- přepermutuj obarvení tž. obě přiřazují v stejnou barvu



$|R| = 1$

Jestliže $R = \{v\}$:

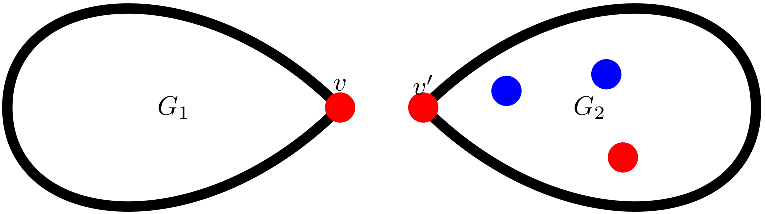
- obarvi G_1 a G_2 (nejsou Δ-regulární) Δ barvami
- přepermutuj obarvení tž. obě přiřazují v stejnou barvu



$|R| = 1$

Jestliže $R = \{v\}$:

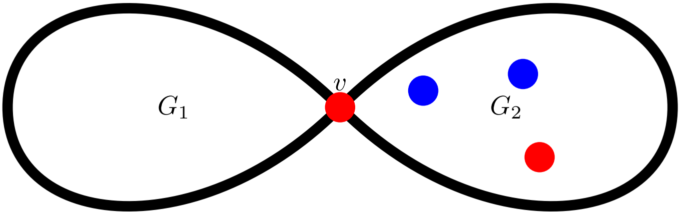
- obarvi G_1 a G_2 (nejsou Δ-regulární) Δ barvami
- přepermutuj obarvení tž. obě přiřazují v stejnou barvu



$|R| = 1$

Jestliže $R = \{v\}$:

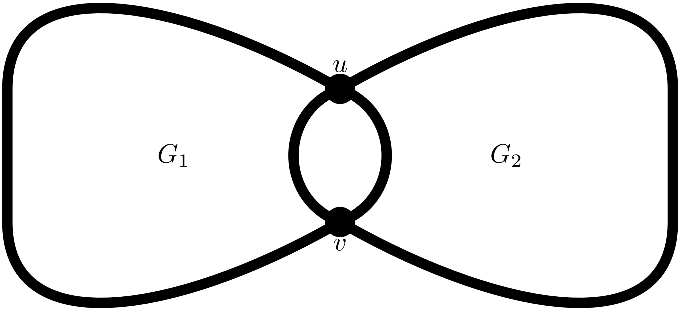
- obarvi G_1 a G_2 (nejsou Δ-regulární) Δ barvami
- přepermutuj obarvení tž. obě přiřazují v stejnou barvu



$|R| = 2$

Jestliže $R = \{u, v\}$:

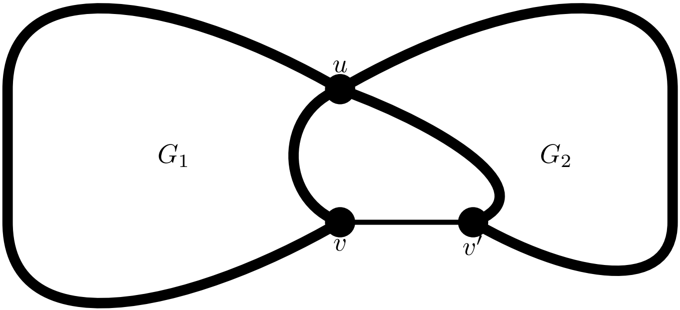
- jelikož $\Delta \geq 3$, BÚNO $\deg_{G_1}(u) > 1$ a $\deg_{G_2}(v) > 1$
  - má-li v jediného souseda v' v G_2, uvážíme řez $\{u, v'\}$ místo R
- pak $G_1 + uv$ a $G_2 + uv$ nejsou Δ-regulární
- $\chi(G_1 + uv) \leq \Delta$, $\chi(G_2 + uv) \leq \Delta$
- permutace obarvení $G_2 + uv$, aby odpovídalo obarvení $G_1 + uv$



$|R| = 2$

Jestliže $R = \{u, v\}$:

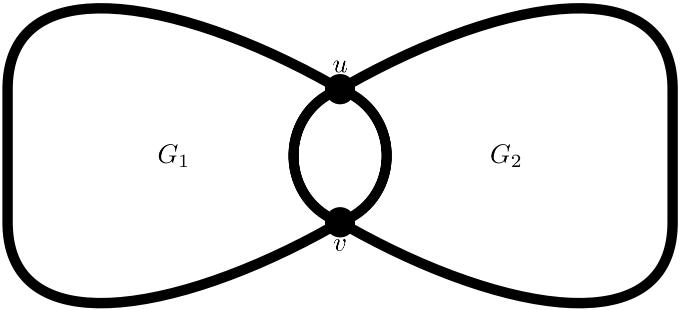
- jelikož $\Delta \geq 3$, BÚNO $\deg_{G_1}(u) > 1$ a $\deg_{G_2}(v) > 1$
  - má-li v jediného souseda v' v G_2, uvážíme řez $\{u, v'\}$ místo R
- pak $G_1 + uv$ a $G_2 + uv$ nejsou Δ-regulární
- $\chi(G_1 + uv) \leq \Delta$, $\chi(G_2 + uv) \leq \Delta$
- permutace obarvení $G_2 + uv$, aby odpovídalo obarvení $G_1 + uv$



$|R| = 2$

Jestliže $R = \{u, v\}$:

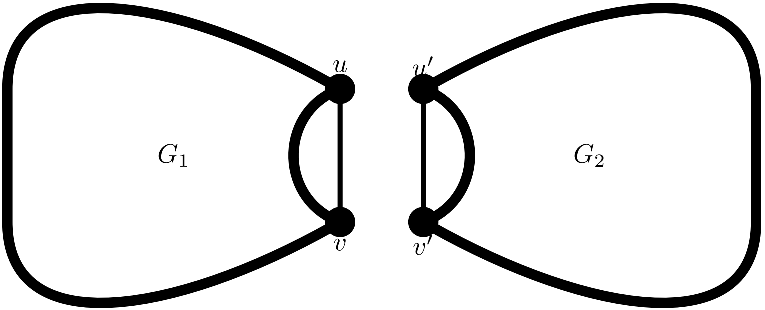
- jelikož $\Delta \geq 3$, BÚNO $\deg_{G_1}(u) > 1$ a $\deg_{G_2}(v) > 1$
    - má-li v jediného souseda v' v G_2, uvážíme řez $\{u, v'\}$ místo R
- pak $G_1 + uv$ a $G_2 + uv$ nejsou Δ-regulární
- $\chi(G_1 + uv) \leq \Delta$, $\chi(G_2 + uv) \leq \Delta$
- permutace obarvení $G_2 + uv$, aby odpovídalo obarvení $G_1 + uv$



$|R| = 2$

Jestliže $R = \{u, v\}$:

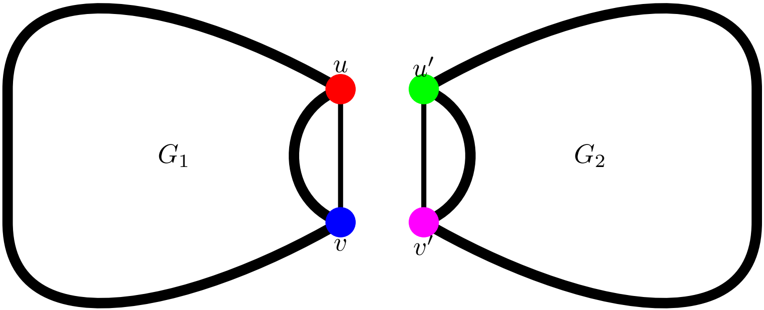
- jelikož $\Delta \geq 3$, BÚNO $\deg_{G_1}(u) > 1$ a $\deg_{G_2}(v) > 1$
  - má-li v jediného souseda v' v G_2, uvážíme řez $\{u, v'\}$ místo R
- pak $G_1 + uv$ a $G_2 + uv$ nejsou Δ-regulární
- $\chi(G_1 + uv) \leq \Delta$, $\chi(G_2 + uv) \leq \Delta$
- permutace obarvení $G_2 + uv$, aby odpovídalo obarvení $G_1 + uv$



$|R| = 2$

Jestliže $R = \{u, v\}$:

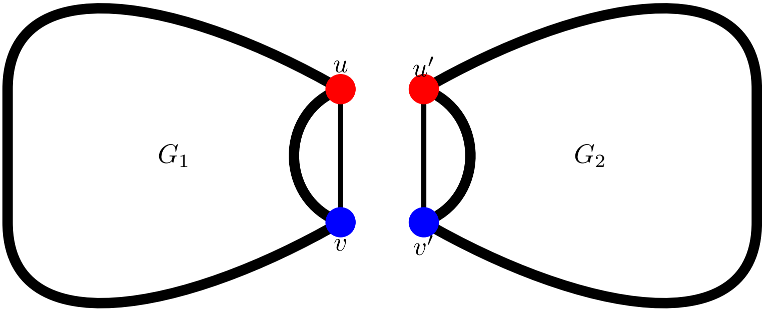
- jelikož $\Delta \geq 3$, BÚNO $\deg_{G_1}(u) > 1$ a $\deg_{G_2}(v) > 1$
  - má-li v jediného souseda v' v G_2, uvážíme řez $\{u, v'\}$ místo R
- pak $G_1 + uv$ a $G_2 + uv$ nejsou Δ-regulární
- $\chi(G_1 + uv) \leq \Delta$, $\chi(G_2 + uv) \leq \Delta$
- permutace obarvení $G_2 + uv$, aby odpovídalo obarvení $G_1 + uv$



$|R| = 2$

Jestliže $R = \{u, v\}$:

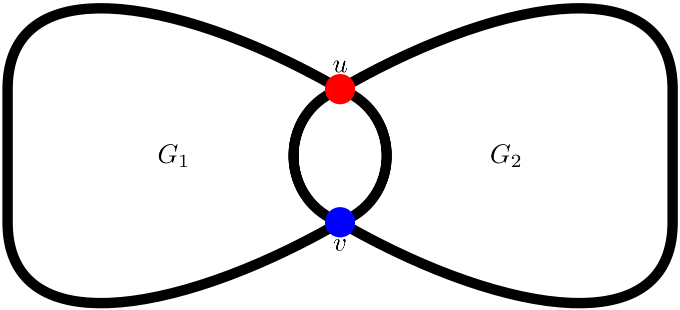
- jelikož $\Delta \geq 3$, BÚNO $\deg_{G_1}(u) > 1$ a $\deg_{G_2}(v) > 1$
  - má-li v jediného souseda v' v G_2, uvážíme řez $\{u, v'\}$ místo R
- pak $G_1 + uv$ a $G_2 + uv$ nejsou Δ-regulární
- $\chi(G_1 + uv) \leq \Delta$, $\chi(G_2 + uv) \leq \Delta$
- permutace obarvení $G_2 + uv$, aby odpovídalo obarvení $G_1 + uv$



$|R| = 2$

Jestliže $R = \{u, v\}$:

- jelikož $\Delta \geq 3$, BÚNO $\deg_{G_1}(u) > 1$ a $\deg_{G_2}(v) > 1$
    - má-li v jediného souseda v' v G_2, uvážíme řez $\{u, v'\}$ místo R
- pak $G_1 + uv$ a $G_2 + uv$ nejsou Δ-regulární
- $\chi(G_1 + uv) \leq \Delta$, $\chi(G_2 + uv) \leq \Delta$
- permutace obarvení $G_2 + uv$, aby odpovídalo obarvení $G_1 + uv$



Shrnutí

Brooksova věta

Je-li G souvislý a není ani úplný ani lichá kružnice, pak

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

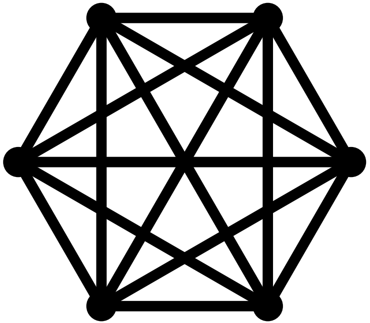
- pravděpodobně nejde zlepšit (popsat nutné a postačující podmínky pro $\chi(G) \leq \Delta(G) - 1$):
  - příklady složitých grafů s $\chi(G) = \Delta(G)$
  - 3-barevnost 4-regulárních grafů je NP-úplná

Hranová barevnost – motivace

Organizujeme turnaj pro n hráčů, každý má hrát s každým, kolik potřebujeme minimálně kol?

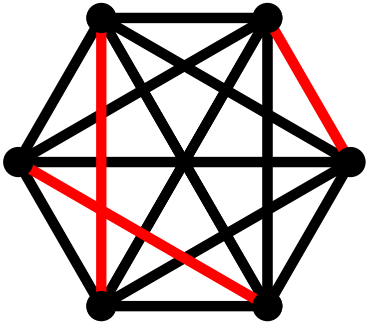
Hranová barevnost – motivace

Organizujeme turnaj pro n hráčů, každý má hrát s každým, kolik potřebujeme minimálně kol?



Organizujeme turnaj pro *n* hráčů, každý má hrát s každým, kolik potřebujeme minimálně kol?

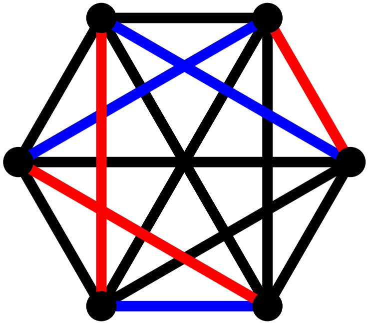
1.kolo:



Hranová barevnost – motivace

Organizujeme turnaj pro n hráčů, každý má hrát s každým, kolik potřebujeme minimálně kol?

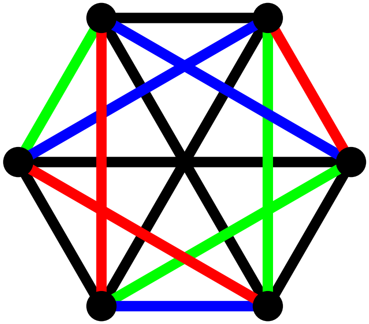
2.kolo:



Hranová barevnost – motivace

Organizujeme turnaj pro *n* hráčů, každý má hrát s každým, kolik potřebujeme minimálně kol?

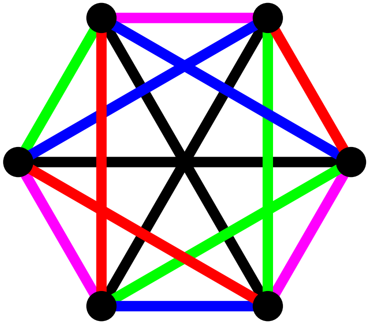
3.kolo:



Hranová barevnost – motivace

Organizujeme turnaj pro *n* hráčů, každý má hrát s každým, kolik potřebujeme minimálně kol?

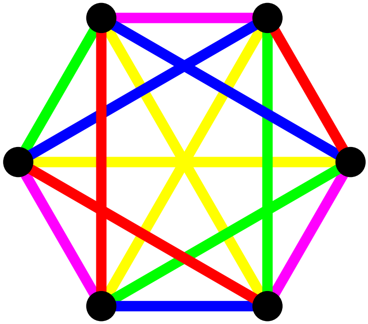
4.kolo:



Hranová barevnost – motivace

Organizujeme turnaj pro n hráčů, každý má hrát s každým, kolik potřebujeme minimálně kol?

5.kolo:

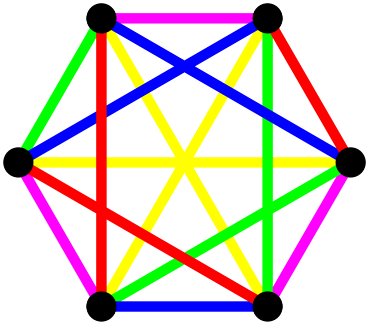


Definice

Obarvení hran je dobré, jestliže žádné dvě hrany incidentní se stejným vrcholem nemají stejnou barvu.

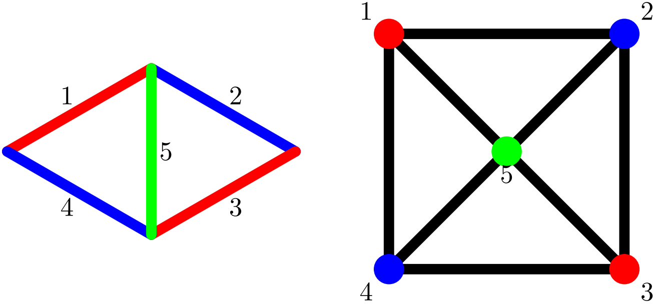
Hranová barevnost $\chi'(G)$ je minimální počet barev dobrého hranového obarvení.

$\chi'(K_6) \leq 5$:



Vlastnosti hranové barevnosti

- záleží na násobných hranách ... budeme uvažovat jen jednoduché grafy
- $\chi'(G) \geq \Delta(G)$
  - hrany u jednoho vrcholem mají navzájem různé barvy
- $\chi'(G) = \chi(L(G))$, kde $L(G)$ je <u>linegraf</u> G:
  - $V(L(G)) = E(G)$, $ef \in E(L(G))$ jestliže e a f jsou incidentní se stejným vrcholem v G



- z Brooksovy věty: $\chi'(G) \leq \Delta(L(G)) \leq 2\Delta(G) - 2$, jestliže $\Delta(G) \geq 3$

Vlastnosti hranové barevnosti

Hranová barevnost je blízká maximálnímu stupni:

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 2$$

Lze tento vztah vylepšit?

Vizingova věta

Libovolný graf G bez smyček a násobných hran splňuje

$$\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Důkaz Vizingovy věty(1)

Indukcí: nechť $e = xy$ je hrana G, předpokládáme $\chi'(G-e) \leq \Delta(G-e)+1 \leq \Delta(G)+1$.

- dobré obarvení $\varphi : E(G-e) \to \{0, 1, \ldots, \Delta\}$ hran $G-e$
- barvy u vrcholu v:

$$C(v) = \{\varphi(uv) : uv \in E(G)\}$$

- barvy nepoužité u v:

$$N(v) = \{0, 1, \ldots, \Delta\} \setminus C(v)$$

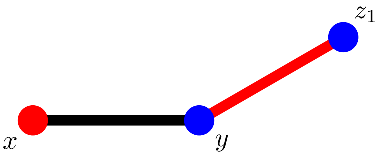
- $\deg(v) < \Delta + 1$, proto $N(v) \neq \emptyset$ pro každý vrchol $v \in V(G)$
- pokud $N(x) \cap N(y) \neq \emptyset$, pak e obarvíme barvou z $N(x) \cap N(y)$

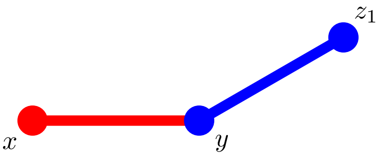
Co když $N(x) \cap N(y) = \emptyset$?

Důkaz Vizingovy věty(2)

$1 \in N(x)$, $1 \notin N(y)$:

- existuje hrana yz_1 obarvená barvou 1
- pokud třeba $0 \in N(z_1) \cap N(y)$:
  - přebarvi yz_1 barvou 0
  - obarvi xy barvou 1



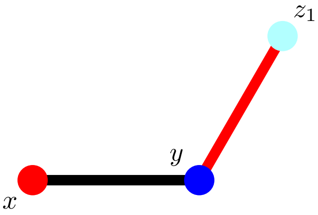


Co když $N(z_1) \cap N(y) = \emptyset$?

Důkaz Vizingovy věty(3)

Dokud to jde, hledáme $yz_2, \ldots, yz_k$ tž:

- $\varphi(yz_i) \in N(z_{i-1})$
- $z_1, \ldots, z_k$ jsou navzájem různé



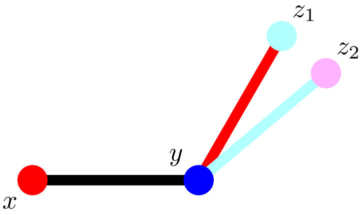
Jestliže nejde pokračovat, pak buď

- chybějící barva u z_k chybí i u y, nebo
- chybějící barva u z_k je $\varphi(yz_m)$ pro nějaké $m < k$.

Důkaz Vizingovy věty(3)

Dokud to jde, hledáme $yz_2, \ldots, yz_k$ tž:

- $\varphi(yz_i) \in N(z_{i-1})$
- $z_1, \ldots, z_k$ jsou navzájem různé



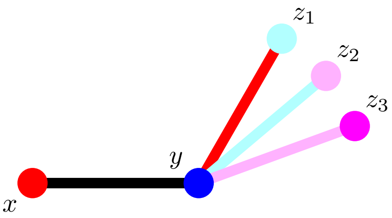
Jestliže nejde pokračovat, pak buď

- chybějící barva u z_k chybí i u y, nebo
- chybějící barva u z_k je $\varphi(yz_m)$ pro nějaké $m < k$.

Důkaz Vizingovy věty(3)

Dokud to jde, hledáme $yz_2, \ldots, yz_k$ tž:

- $\varphi(yz_i) \in N(z_{i-1})$
- $z_1, \ldots, z_k$ jsou navzájem různé



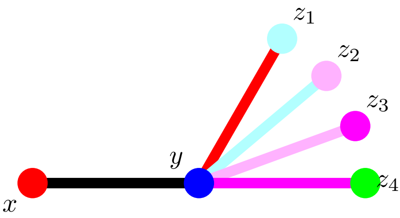
Jestliže nejde pokračovat, pak buď

- chybějící barva u z_k chybí i u y, nebo
- chybějící barva u z_k je $\varphi(yz_m)$ pro nějaké $m < k$.

Důkaz Vizingovy věty(3)

Dokud to jde, hledáme $yz_2, \ldots, yz_k$ tž:

- $\varphi(yz_i) \in N(z_{i-1})$
- $z_1, \ldots, z_k$ jsou navzájem různé



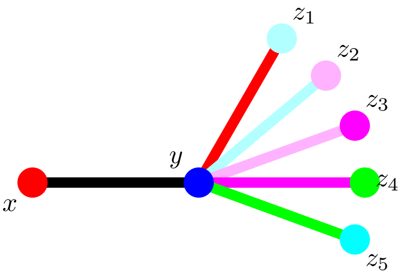
Jestliže nejde pokračovat, pak buď

- chybějící barva u z_k chybí i u y, nebo
- chybějící barva u z_k je $\varphi(yz_m)$ pro nějaké $m < k$.

Důkaz Vizingovy věty(3)

Dokud to jde, hledáme $yz_2, \ldots, yz_k$ tž:

- $\varphi(yz_i) \in N(z_{i-1})$
- $z_1, \ldots, z_k$ jsou navzájem různé



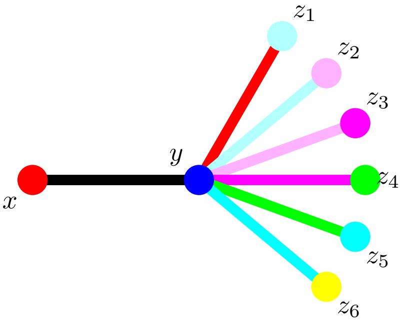
Jestliže nejde pokračovat, pak buď

- chybějící barva u z_k chybí i u y, nebo
- chybějící barva u z_k je $\varphi(yz_m)$ pro nějaké $m < k$.

Důkaz Vizingovy věty(3)

Dokud to jde, hledáme $yz_2, \ldots, yz_k$ tž:

- $\varphi(yz_i) \in N(z_{i-1})$
- $z_1, \ldots, z_k$ jsou navzájem různé



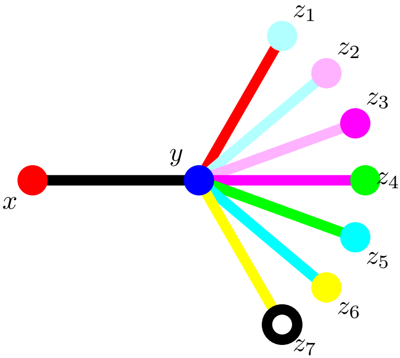
Jestliže nejde pokračovat, pak buď

- chybějící barva u z_k chybí i u y, nebo
- chybějící barva u z_k je $\varphi(yz_m)$ pro nějaké $m < k$.

Důkaz Vizingovy věty(3)

Dokud to jde, hledáme $yz_2, \ldots, yz_k$ tž:

- $\varphi(yz_i) \in N(z_{i-1})$
- $z_1, \ldots, z_k$ jsou navzájem různé



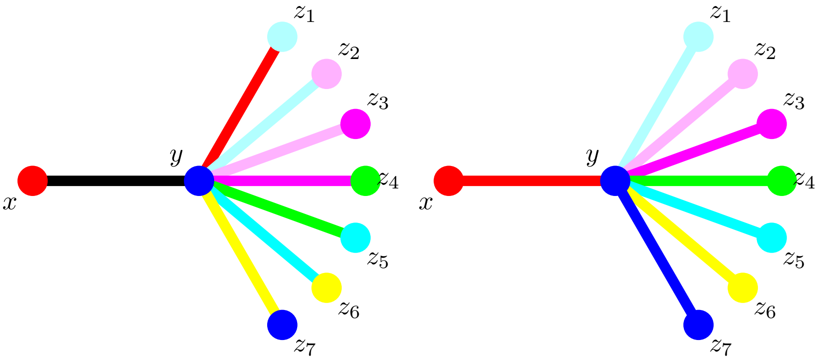
Jestliže nejde pokračovat, pak buď

- chybějící barva u z_k chybí i u y, nebo
- chybějící barva u z_k je $\varphi(yz_m)$ pro nějaké $m < k$.

Důkaz Vizingovy věty(4)

Pokud barva c chybí jak u z_k, tak u y:

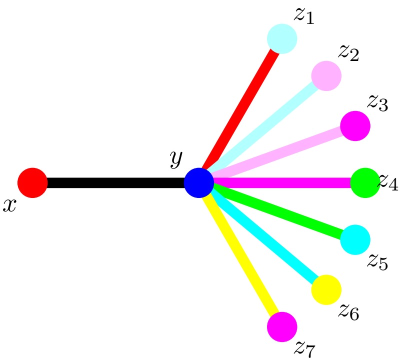
- přebarvi yz_i barvou $\varphi(yz_{i+1})$, pro $1 \leq i < k$
- přebarvi yz_k barvou c
- obarvi xy barvou $\varphi(yz_1)$

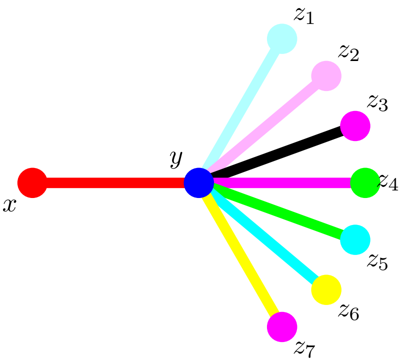


Důkaz Vizingovy věty(5)

Pokud barva $c = \varphi(yz_m)$ pro nějaké $m < k$ chybí u z_k:
Pokud $m > 1$, pak pro zjednodušení:

- odbarvi yz_{m-1}
- přebarvi yz_i barvou $\varphi(yz_{i+1})$, pro $1 \le i < m - 1$
- obarvi xy barvou $\varphi(yz_1)$

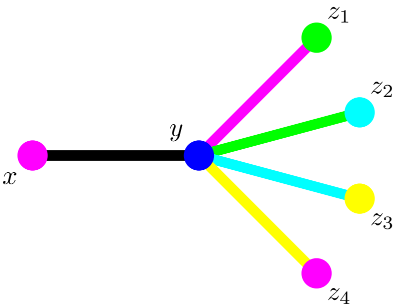




Proto stačí uvažovat $m = 1$.

Důkaz Vizingovy věty(6)

Barva $c = \varphi(yz_1)$ chybí u z_k (a také u x). Barva d chybí u y (a nechybí u z_k).



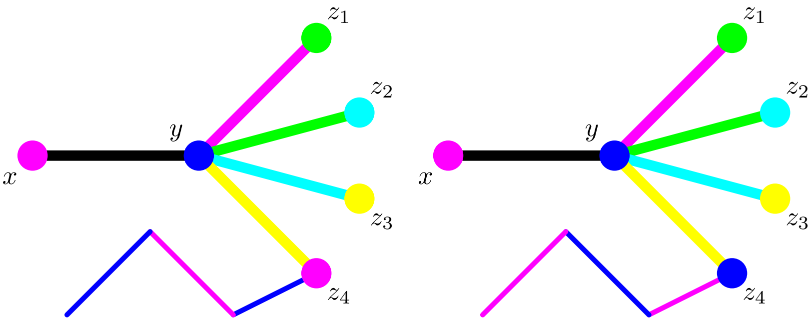
Uvažme střídavou d – c cestu P ze z_k: buď

- nekončí v x ani y, nebo
- končí v x, nebo
- končí v y.

Důkaz Vizingovy věty(7)

Barva $c = \varphi(yz_1)$ chybí u z_k (a také u x). Barva d chybí u y (a nechybí u z_k). Střídavá d – c cesta ze z_k nekončí v x ani y.

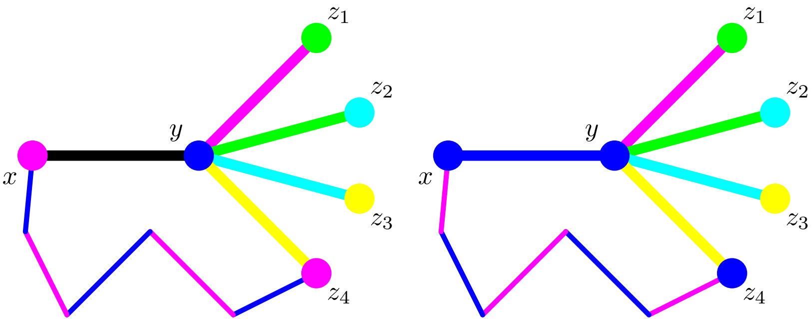
- prohodíme barvy na P
- d nyní chybí jak u y tak u z_k
- přebarvíme jako v případě (4).



Důkaz Vizingovy věty(8)

Barva $c = \varphi(yz_1)$ chybí u z_k (a také u x). Barva d chybí u y (a nechybí u z_k). Střídavá d – c cesta ze z_k končí v x.

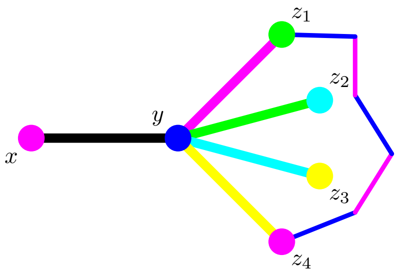
- prohodíme barvy na P
- d nyní chybí jak u x tak u y
- hranu xy obarvíme d



Důkaz Vizingovy věty(9)

Barva $c = \varphi(yz_1)$ chybí u z_k (a také u x). Barva d chybí u y (a nechybí u z_k). Střídavá d – c cesta ze z_k končí v y.

- prohodíme barvy na P
- c nyní chybí jak u x tak u y
- hranu xy obarvíme c



Shrnutí

Vizingova věta

Libovolný graf G bez smyček a násobných hran splňuje

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

- rozhodnout zda $\chi'(G) = \Delta(G)$ nebo $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ je těžké:
  - hranová 3-barevnost 3-regulárních grafů je NP-úplná
- dolní hranice se nabývá pro
  - bipartitní grafy
  - rovinné 3-regulární grafy bez mostů (ekvivalentní větě o 4 barvách)