Minory a stupně v grafu

Zdeněk Dvořák

5. října 2017

1 Minory a podrozdělení

Definice 1. *Graf H je* minor *grafu G, lze-li H získat z podgrafu G kontrakcemi hran.*

Definice 2. Model *grafu H v grafu G je funkce φ přiřazující vrcholům grafu H navzájem vrcholově disjunktní souvislé podgrafy grafu G tak, že pro každé $uv \in E(H)$ existuje v G hrana s jedním koncem ve $\varphi(u)$ a druhým koncem ve $\varphi(v)$.*

Pozorování 1. *Graf H je minorem grafu G právě tehdy, když existuje model H v G.*

Pozorování 2. *Obsahuje-li G podrozdělení grafu H jako podgraf, pak H je minor G. Je-li H minorem G a maximální stupeň H je nejvýše 3, pak G obsahuje podrozdělení H jako podgraf.*

2 Klikové součty

Definice 3. *Nechť G je graf takový, že $G = G_1 \cup G_2$. Nechť $S = V(G_1 \cap G_2)$ a G_1' a G_2' jsou grafy vzniklé z G_1 a G_2 přidáním všech hran s oběma konci v S. Je-li $k = |S|$, říkáme, že G* je k-suma grafů *G_1'* a *G_2'.*

Lemma 3. *Nechť H je 3-souvislý graf. Pak H není minorem grafu G právě tehdy, když existují 3-souvislé grafy neobsahující H jako minor, z nichž se G dá vyrobit pomocí (≤ 2)-sum.*

Důkaz. Dokážeme indukcí dle počtu vrcholů G, že pokud H není minorem grafu G, pak existují 3-souvislé grafy $G_1, \ldots, G_m$ neobsahující H jako minor, z nichž se G dá vyrobit pomocí (≤ 2)-sum. Je-li G 3-souvislý, pak je tvrzení triviální. Nechť S je nejmenší řez v G a předpokládejme, že $|S| \le 2$. Nechť

$G = G_1 \cup G_2$ pro podgrafy G_1 a G_2 tž. $V(G_1) \neq S \neq V(G_2)$ a $S = V(G_1 \cap G_2)$. Nechť G_1' a G_2' jsou grafy vzniklé z G_1 a G_2 přidáním hrany s oběma konci v S když $|S| = 2$, a nechť $G_1' = G_1$ a $G_2' = G_2$ jestliže $|S| \leq 1$. Pak G je $|S|$-suma G_1' a G_2'. Stačí tedy ukázat, že G_1' ani G_2' neobsahují H jako minor, a tvrzení pak bude plynout z indukčního předpokladu aplikovaného na G_1' a G_2'.

Jestliže $G_1' = G_1$, pak G_1' je podgraf G, a tedy zjevně neobsahuje H jako minor. Proto můžeme předpokládat, že $|S| = 2$ a $G_1' = G_1 + xy$, kde $S = \{x, y\}$. Z minimality S plyne, že G je 2-souvislý, a proto G_2 obsahuje cestu P mezi x a y. Proto G_1' je minorem grafu $G_1 + P \subseteq G$. Tedy G_1' je minor G, a proto G_1' neobsahuje H jako minor. Obdobně ani G_2' neobsahuje H jako minor.

Nyní ukažme opačnou implikaci. Zjevně stačí ukázat, že neobsahují-li grafy G_1' a G_2' graf H jako minor, pak ani (≤ 2)-suma G grafů G_1' a G_2' neobsahuje H jako minor. Nechť $S = V(G_1' \cap G_2')$. Kdyby G obsahovalo H jako minor, pak uvažme model φ grafu H v G. Kdyby existovaly vrcholy $u, v \in V(H)$ takové, že $\varphi(u) \subseteq V(G_1') \setminus S$ a $\varphi(v) \subseteq V(G_2') \setminus S$, pak H by obsahovalo řez velikosti nejvýše $|S| \leq 2$ (který φ zobrazuje na podgrafy obsahující vrcholy S), což je ve sporu s předpokladem, že H je 3-souvislý. Proto ze symetrie můžeme předpokládat, že pro každé $v \in V(H)$ má $\varphi(v)$ neprázdný průnik s G_1'. Pak ale restrikce modelu φ na vrcholy G_1' dává model H v G_1', což je spor, jelikož G_1' neobsahuje H jako minor. □

3 Zakázané kliky

Lemma 4.

- *Graf G neobsahuje K_2 jako minor právě tehdy, když G nemá žádné hrany, tj. G je 0-suma kopií K_1.*
- *Graf G neobsahuje K_3 jako minor právě tehdy, když G je les, tj. G je (≤ 1)-suma kopií K_1 a K_2.*
- *Graf G neobsahuje K_4 jako minor právě tehdy, když G je (≤ 2)-suma kopií K_1, K_2 a K_3.*

Důkaz. První dvě tvrzení jsou triviální. Uvažme 3-souvislý graf F s alespoň čtyřmi vrcholy, a nechť C je nejkratší cyklus v F (zjevě F není les). Cyklus C je indukovaný, jelikož je nejkratší v F. Jelikož F je 3-souvislý a $|V(F)| \geq 4$, existuje $v \in V(F) \setminus V(C)$. Dle Mengerovy věty existují tři vrcholově disjunktní cesty z v do $V(C)$, které dohromady tvoří podrozdělení K_4.

Každý 3-souvislý graf s alespoň čtyřmi vrcholy tedy obsahuje K_4 jako minor. Třetí tvrzení pak plyne z Lemma 3, jelikož jediné 3-souvislé grafy s nejvýše třemi vrcholy jsou K_1, K_2 a K_3. □

Nechť W_8 je graf na 8 vrcholech $v_1, \ldots, v_8$ a s hranami $v_i v_{i+1}$ a $v_i v_{i+4}$ pro $1 \leq i \leq 8$ (kde indexy se berou cyklicky, tj. $v_9 = v_1$, $v_{10} = v_2$, $\ldots$).

Věta 5 (Wagner, nebudeme dokazovat)**.** *Graf G neobsahuje K_5 jako minor právě tehdy, když G je (≤ 3)-suma kopií rovinných grafů a W_8.*

Důsledek 6. *Pro $k \leq 4$, jestliže G neobsahuje K_{k+1} jako minor, pak $\chi(G) \leq k$.*

Nechť $f(k)$ je nejmenší přirozené číslo takové, že každý graf minimálního stupně $f(k)$ obsahuje K_k jako minor.

Důsledek 7. *$f(2) = 1$, $f(3) = 2$, $f(4) = 3$, $f(5) = 6$.*

4 Minory a průměrný stupeň

Lemma 8. *Pro přirozené číslo $t \geq 1$, každý graf s alespoň t^2 vrcholy buď obsahuje trojúhelník nebo nezávislou množinu velikosti alespoň t.*

Důkaz. Nechť F je graf s alespoň t^2 vrcholy, který neobsahuje trojúhelník. Má-li F maximální stupeň alespoň t, pak okolí vrcholu maximálního stupně je nezávislá množina velikosti alespoň t. Předpokládejme tedy, že F má maximální stupeň nejvýše $t - 1$.

Nechť S je největší nezávislá množina v F. Pak každý vrchol F buď patří do S, nebo má souseda v S, a proto $t|S| \geq |V(F)| \geq t^2$ a $|S| \geq t$. □

Lemma 9. *Nechť $d \geq 1$ je přirozené číslo a nechť graf G má alespoň $d|V(G)|$ hran. Nechť G' je minor G takový, že $|E(G')| \geq d|V(G')|$ a přitom $|V(G')| + |E(G')|$ je nejmenší možné. Pak každá hrana G' je obsažena v alespoň d trojúhelnících a minimální stupeň G' je alespoň $d + 1$ a nejvýše $2d$.*

Důkaz. Nechť hrana xy grafu G' je obsažena v t trojúhelnících. Kontrakcí hrany xy snížíme počet vrcholů o 1 a počet hran o $t + 1$, a z minimality grafu G' dostáváme $t + 1 > d$, a tedy $t \geq d$. Odebrání vrcholu stupně k sníží počet vrcholů o 1 a počet hran o k, a tedy $k \geq d + 1$. Z minimality G' také plyne, že odebráním libovolné hrany se počet hran sníží pod $d|V(G')|$, a proto $|E(G')| = d|V(G')|$ a průměrný stupeň G' je $2d$. Minimální stupeň je tedy nejvýše $2d$. □

Důsledek 10. *Nechť $d \geq 1$ je přirozené číslo a nechť graf G má alespoň $d|V(G)|$ hran. Pak existuje minor H grafu G takový, že $|V(H)| \leq 2d$ a H má minimální stupeň alespoň d.*

Důkaz. Vezměme minor G' z Lemma 9 a vyberme si v něm libovolný vrchol v minimálního stupně. Jako H označme podgraf G' indukovaný sousedy v; pak H má nejvýše $2d$ vrcholů. Je-li $u \in V(H)$, pak jelikož hrana uv leží v alespoň d trojúhelnících v G', dostáváme, že u má v H alespoň d sousedů. $\square$

Dva vrcholy grafu H jsou *d-různé*, mají-li méně než $d/3$ společných sousedů. *Graf d-různosti* grafu H má množinu vrcholů $V(H)$ a dva vrcholy jsou spojené hranou právě tehdy, když jsou d-různé.

Lemma 11. *Nechť $d \geq 1$ je přirozené číslo a nechť graf H má nejvýše $2d$ vrcholů. Má-li H minimální stupeň alespoň d, pak jeho graf d-různosti F neobsahuje trojúhelník.*

Důkaz. Uvažme libovolné různé hrany $uv, uw \in E(F)$. Nechť S je množina nesousedů vrcholu u; máme $|S| \leq |V(H)| - \deg u \leq d$. Jelikož $uv \in E(F)$, vrchol v má méně než $d/3$ společných sousedů s u, a proto v má více než $\frac{2}{3}d$ sousedů v S. Obdobně i w má více než $\frac{2}{3}d$ sousedů v S. Počet společných sousedů v a w je tedy více než $2 \cdot \frac{2}{3}d - |S| \geq d/3$, a proto $vw \notin E(F)$. S toho plyne, že uvw není trojúhelník v F. $\square$

Věta 12. *Nechť $k \geq 1$ je přirozené číslo a $d = \frac{3}{2}k(k+1)$. Má-li graf G alespoň $d|V(G)|$ hran, pak G obsahuje K_k jako minor.*

Důkaz. Nechť H je minor G získaný v Důsledku 10, a tedy $|V(H)| \leq 2d$ a H má minimální stupeň alespoň d. Nechť F je graf d-různosti grafu H. Dle Lemma 11 F neobsahuje trojúhelník a dle Lemma 8 má F nezávislou množinu S velikosti k.

Uvažme libovolné dva vrcholy $u, v \in S$. Jelikož $uv \notin E(F)$, u a v mají alespoň $d/3$ společných sousedů v H, a alespoň $d/3 - k = \binom{k}{2}$ z nich není obsaženo v S. Pro každý pár $\{u, v\} \subseteq S$ si proto můžeme zvolit jejich společného souseda m_{uv} nepatřícího do S tak, že volby jsou navzájem různé pro různé dvojice vrcholů z S. Sjednocení cest $um_{uv}v$ pro $\{u, v\} \subseteq S$ tvoří podrozdělení K_k v H. Tedy H obsahuje K_k jako minor, a proto i G obsahuje K_k jako minor. $\square$

Důsledek 13. $f(k) \leq 3k(k+1)$.

5 Minory a průměrný stupeň – alternativní důkaz

Definice 4. *Nechť Z je podmnožina vrcholů grafu G. Říkáme, že Z má* tloušťku *nejvýše t (vůči grafu G), jestliže graf $G[Z]$ je souvislý a existuje vrchol $v_0 \in Z$ takový, že pro každé $d \geq 0$ obsahuje Z nejvýše t vrcholů ve vzdálenosti právě d od v_0 (vzdálenost se měří v G, ne v $G[Z]$).*

Lemma 14. *Má-li množina $Z \subseteq V(G)$ tloušťku nejvýše t, pak každý vrchol $v \in V(G)$ má nejvýše $3t$ sousedů v Z.*

Důkaz. Nechť $v_0 \in Z$ je vrchol takový, že každé $d \geq 0$ obsahuje Z nejvýše t vrcholů ve vzdálenosti právě d od v_0. Nechť z je soused v v Z jehož vzdálenost d od v_0 je nejmenší možná. Pak v má od v_0 vzdálenost nejvýše $d+1$ a všichni jeho sousedi mají vzdálenost od v_0 nejvýše $d+2$. Všichni sousedi v v Z mají tedy vzdálenost d, $d+1$ nebo $d+2$ od v_0 a je jich tedy nejvýše $3t$. □

Jsou-li X a Y disjunktní podmnožiny vrcholů grafu G, říkáme, že X a Y sousedí, existuje-li v G hrana s jedním koncem v X a druhým v Y.

Definice 5. *Nechť G je graf a $Z_1, \ldots, Z_m$ jsou podmnožiny jeho vrcholů. Říkáme, že $Z_1, \ldots, Z_m$ je t-*úzký rozklad* G, jestliže*

(a) Množiny $Z_1, \ldots, Z_m$ jsou navzájem disjunktní a $V(G) = Z_1 \cup \ldots \cup Z_m$.

(b) Pro $i = 1, \ldots, m$ má množina Z_i tloušťku nejvýše t vůči grafu $G - (Z_1 \cup \ldots \cup Z_{i-1})$.

(c) Pro $1 \leq i < j < n \leq m$, sousedí-li Z_i i Z_j se Z_n, pak sousedí i Z_i s Z_j.

Lemma 15. *Jestliže G neobsahuje K_k jako minor a G má t-úzký rozklad, pak minimální stupeň G je nejvýše $(3k-5)t$.*

Důkaz. Nechť $Z_1, \ldots, Z_m$ je t-úzký rozklad G. Nechť v je vrchol Z_m takový, že pro každé $d \geq 0$ obsahuje Z_m nejvýše t vrcholů, jejichž vzdálenost od v v $G - (Z_1 \cup \ldots \cup Z_{m-1}) = G[Z_m]$ je právě d. Pak v má nejvýše t sousedů (vzdálenost 1) v Z_m.

Nechť v má sousedy v množinách $Z_{i_1}, Z_{i_2}, \ldots, Z_{i_p}$ takových, že $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_p \leq m-1$. Pak Z_m sousedí s všemi těmito množinami, a dle Definice 5(c) platí, že i množiny $Z_{i_1}, \ldots, Z_{i_p}$ navzájem sousedí. Jelikož G neobsahuje K_k jako minor, dostáváme $p \leq k-2$. Navíc dle Lemma 14 má v v každé z množin $Z_{i_1}, \ldots, Z_{i_p}$ nejvýše $3t$ sousedů.

Stupeň v je tedy nejvýše $t + 3tp \leq (3k-5)t$. □

Lemma 16. *Jestliže G neobsahuje K_k jako minor, pak G má $(k-2)$-úzký rozklad.*

Důkaz. Množiny Z_1, Z_2, … konstruujme postupně. Nechť jsme již nalezli Z_1, …, Z_p. Udržujeme následující invariant:

(KL) Je-li K komponenta $G-(Z_1 \cup \ldots \cup Z_p)$ a pro nějaké $1 \leq i < j \leq k$ sousedí Z_i i Z_j s K, pak Z_i sousedí se Z_j.

Jestliže $V(G) = Z_1 \cup \ldots \cup Z_p$, pak jsme hotovi. Jinak uvažme libovolnou komponentu K grafu $G-(Z_1 \cup \ldots \cup Z_p)$ a zvolme v_0 jako její libovolný vrchol. Nechť I je množina indexů i takových, že Z_i sousedí s K. Dle (KL) množiny Z_i tž. $i \in I$ navzájem sousedí, a jelikož G neobsahuje K_k jako minor, máme $|I| \leq k-2$. Pro každé $i \in I$ budiž P_i nejkratší cesta v K z v_0 do vrcholu se sousedem v Z_i, a položme $Z_{p+1} = \bigcup_{i \in I} V(P_i)$.

Jelikož cesty P_i jsou nejkratší, pro každé $d \geq 0$ každá z nich obsahuje nejvýše jeden vrchol ve vzdálenosti přesně d od v_0, a tedy počet takových vrcholů v Z_{p+1} je nejvýše $|I| \leq k-2$. Množina Z_{p+1} má tedy tloušťku nejvýše $k-2$. Dle (KL) a volby Z_{p+1} nahlédneme, že podmínka z Definice 5(c) platí pro $n = p+1$.

Zbývá tedy ukázat, že platí invariant (KL). Nechť K' je komponenta $G-(Z_1 \cup \ldots \cup Z_{p+1})$. Jestliže K' není podmnožinou K, pak K' nesousedí s Z_{p+1} a podmínka (KL) pro K' platí, jelikož platila před volbou Z_{p+1}. Jestliže K' je podmnožinou K, pak K' sousedí s Z_{p+1} a s některými z Z_1, …, Z_p, se kterými sousedí K, ty ale dle (KL) před volbou Z_{p+1} a konstrukce Z_{p+1} sousedí navzájem. Invariant (KL) tedy stále platí. □

Lemmata 15 a 16 dohromady implikují, že graf neobsahující K_k má minimální stupeň nejvýše $(3k-5)(k-2) = 3k^2 - 11k + 10$. Dostáváme tedy následující.

Důsledek 17. $f(k) \leq 3k^2 - 11k + 11$.