

Další aplikace regularity lemma a jeho důkaz

Zdeněk Dvořák

4. ledna 2018

Další aplikace regularity lemma

Definice 1. Pro graf H jako $r(H)$ označme nejmenší přirozené číslo takové, že pro každé $n \geq r(H)$ platí následující: necht' G_R je libovolný graf na n vrcholech a necht' G_B je jeho doplněk; pak $H \subseteq G_R$ nebo $H \subseteq G_B$.

Připomenutí: $r(K_k) \leq 4^k$.

Věta 1. Pro každé $\Delta > 0$ existuje $\beta > 0$ takové, že je-li H graf maximálního stupně nejvýše Δ , pak $r(H) \leq \beta|V(H)|$.

Náznak důkazu. Vhodně zvolíme parametry $\varepsilon > 0$, m_0 , a β . Necht' $n \geq \beta|V(H)|$, necht' G_R je libovolný graf na n vrcholech a necht' G_B je jeho doplněk. Dle Regularity lemmatu má G_R ε -regulární rozklad V_0, \dots, V_m pro nějaké $m_0 \leq m \leq M$. Necht' Q je pomocný graf s vrcholy $\{1, \dots, m\}$, kde ij je hrana, jestliže pár (V_i, V_j) je ε -regulární.

Graf Q má tedy alespoň $\binom{m}{2} - \varepsilon m^2$ hran. Jelikož $m \geq m_0$, z Turánovy věty vyvodíme, že existuje nějaká $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ velikosti alespoň $r(K_{\Delta+1})$ indukující v Q úplný podgraf. Necht' Q_R je graf s $V(Q_R) = I$, kde ij je hrana, jestliže $d_{G_R}(V_i, V_j) \geq 1/2$. Necht' Q_B je doplněk Q_R ; povšimněte si, že je-li $ij \in E(Q_B)$, pak (V_i, V_j) je ε -regulární pár v G_B a $d_{G_B}(V_i, V_j) \geq 1/2$.

Jelikož $|I| \geq r(K_{\Delta+1})$, existuje $J \subseteq I$ velikosti $\Delta+1$ takové, že buď $Q_R[J]$ nebo $Q_B[J]$ je úplný graf. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že nastane druhá z těchto možností. Pak pro každá různá $i, j \in J$ platí, že (V_i, V_j) je ε -regulární pár v G_B a $d_{G_B}(V_i, V_j) \geq 1/2$. Navíc $|V_i| \geq \frac{1-\varepsilon}{m}n \geq \frac{(1-\varepsilon)\beta}{M}|V(H)|$. Protože H má maximální stupeň nejvýše Δ , jeho barevnost je nejvýše $\Delta+1$. Pro dostatečně velké c tedy z Lemma 3 plyne, že $H \subseteq G_B$. \square

Důkaz regularity lemma

Lemma 2 (Cauchy-Schwarzova nerovnost). *Pro libovolná reálná čísla u_1, \dots, u_n a v_1, \dots, v_n platí $(\sum_{i=1}^n u_i^2)(\sum_{i=1}^n v_i^2) \geq (\sum_{i=1}^n u_i v_i)^2$.*

Věta 3 (Szemerédiho Regularity lemma). *Pro každé $m_0 > 0$ a $\varepsilon > 0$ existuje $M \geq m_0$ tak, že platí následující. Každý graf G s alespoň m_0 vrcholy má ε -regulární rozklad řádu alespoň m_0 a nanejvýš M .*

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $\varepsilon < 1/2$. Z technických důvodů si místo jedné malé odpadní množiny V_0 budeme udržovat malý počet jednoprvkových odpadních částí. Nechť G má $n \geq m_0$ vrcholů. Pro disjunktní $A, B \subseteq V(G)$ si označme $q(A, B) = |A||B|d^2(A, B)$. Nechť $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$ je rozklad $V(G)$. Jako $q(\mathcal{P})$ si označme $\sum_{i < j} q(P_i, P_j)$. Zjevně $q(A, B) \leq |A||B|$ a $q(\mathcal{P}) \leq \sum_{i < j} |P_i||P_j| < n^2$.

Lemma 4. *Je-li $\{A_1, \dots, A_s\}$ rozklad A a $\{B_1, \dots, B_s\}$ rozklad B , pak $\sum_{i,j} q(A_i, B_j) \geq q(A, B)$.*

Důkaz. Máme $e(A, B) = \sum_{i,j} e(A_i, B_j)$. Dále si povšimněme, že $|A||B| = \sum_{i,j} |A_i||B_j|$.

Položme $u_{i,j} = \sqrt{|A_i||B_j|}d(A_i, B_j)$ a $v_{i,j} = \sqrt{|A_i||B_j|}$. Máme tedy

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} u_{i,j}^2 &= \sum_{i,j} q(A_i, B_j) \\ \sum_{i,j} v_{i,j}^2 &= \sum_{i,j} |A_i||B_j| = |A||B| \\ \sum_{i,j} u_{i,j}v_{i,j} &= \sum_{i,j} d(A_i, B_j)|A_i||B_j| = \sum_{i,j} e(A_i, B_j) = e(A, B). \end{aligned}$$

Z Cauchy-Schwarzovy nerovnosti pak dostáváme

$$|A||B| \sum_{i,j} q(A_i, B_j) \geq e^2(A, B) = |A|^2|B|^2d^2(A, B),$$

a tedy

$$\sum_{i,j} q(A_i, B_j) \geq |A||B|d^2(A, B) = q(A, B).$$

□

Rozdělení \mathcal{P}' zjemňuje rozdělení \mathcal{P} , jestliže každé $P' \in \mathcal{P}'$ je podmnožinou nějaké části $P \in \mathcal{P}$. Společné zjemnění dvou rozdělení \mathcal{P}_1 a \mathcal{P}_2 obsahuje části $\{A \cap B : A \in \mathcal{P}_1, B \in \mathcal{P}_2, A \cap B \neq \emptyset\}$.

Důsledek 5. Jestliže \mathcal{P}' zjemňuje \mathcal{P} , pak $q(\mathcal{P}') \geq q(\mathcal{P})$.

Důkaz. Nechť $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_s\}$. Pro $1 \leq i \leq s$ jako \mathcal{P}_i označme $\{Q \in \mathcal{P}' : Q \subseteq P_i\}$, takže $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_1 \cup \dots \cup \mathcal{P}_s$. Pak $q(\mathcal{P}') \geq \sum_{1 \leq i < j \leq s} \sum_{Q \in \mathcal{P}_i, R \in \mathcal{P}_j} q(Q, R) \geq \sum_{1 \leq i < j \leq s} q(P_i, P_j) = q(\mathcal{P})$ dle Lemma 4. \square

Dále potřebujeme následující variantu Lemma 4.

Lemma 6. Nechť A a B není ε -regulární pár, a existují tedy $A_1 \subseteq A$ a $B_1 \subseteq B$ tž. $|A_1| \geq \varepsilon|A|$, $|B_1| \geq \varepsilon|B|$, a $|d(A_1, B_1) - d(A, B)| > \varepsilon$. Položme $A_2 = A \setminus A_1$ a $B_2 = B \setminus B_1$. Pak $\sum_{1 \leq i, j \leq 2} q(A_i, B_j) > q(A, B) + \varepsilon^4|A||B|$.

Důkaz. Nechť $d = d(A, B)$. Pro $1 \leq i, j \leq 2$, $u \in A_i$ a $v \in B_j$ nadefinujeme $d(u, v) = d(A_i, B_j)$ a $\delta(u, v) = d(u, v) - d$. Máme

$$d|A||B| = \sum_{1 \leq i, j \leq 2} d(A_i, B_j)|A_i||B_j| = \sum_{u \in A, v \in B} d(u, v) = d|A||B| + \sum_{u \in A, v \in B} \delta(u, v),$$

a proto

$$\sum_{u \in A, v \in B} \delta(u, v) = 0.$$

Dále, $q(A, B) = |A||B|d^2$ a

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq 2} q(A_i, B_j) &= \sum_{1 \leq i, j \leq 2} |A_i||B_j|d^2(A_i, B_j) = \sum_{u \in A, v \in B} d^2(u, v) \\ &= \sum_{u \in A, v \in B} (d + \delta(u, v))^2 = \sum_{u \in A, v \in B} (d^2 + 2d\delta(u, v) + \delta^2(u, v)) \\ &= |A||B|d^2 + 2d \sum_{u \in A, v \in B} \delta(u, v) + \sum_{u \in A, v \in B} \delta^2(u, v) \\ &= q(A, B) + \sum_{u \in A, v \in B} \delta^2(u, v) \geq q(A, B) + \sum_{u \in A_1, v \in B_1} \delta^2(u, v) \\ &> q(A, B) + |A_1||B_1|\varepsilon^2 \geq q(A, B) + \varepsilon^4|A||B|. \end{aligned}$$

\square

Nechť $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_s, V_{s+1}, \dots, V_{s+t}\}$ je rozdělení $V(G)$, kde $t \leq \varepsilon n$, $|V_i| = 1$ pro $i \geq s+1$ a $|V_1| = \dots = |V_s| = N$. Předpokládejme, že rozdělení $\{V_{s+1} \cup \dots \cup V_{s+t}, V_1, \dots, V_s\}$ není ε -regulární. Pak existuje množina X obsahující alespoň εs^2 dvojic i, j takových, že (V_i, V_j) není ε -regulární. Pro každé $ij \in X$ si nadefinujeme rozdělení $\mathcal{P}_{ij} = \{V_{i,j,1}, V_{i,j,2}, V_{j,i,1}, V_{j,i,2}, V(G) \setminus (V_i \cup V_j)\}$ množiny $V(G)$, kde $V_i = V_{i,j,1} \cup V_{i,j,2}$, $V_j = V_{j,i,1} \cup V_{j,i,2}$, $|V_{i,j,1}| \geq \varepsilon|V_i|$,

$|V_{j,i,1}| \geq \varepsilon|V_j|$, a $|d(V_{i,j,1}, V_{j,i,1}) - d(V_i, V_j)| > \varepsilon$. Necht' \mathcal{P}' je společné zjemnění \mathcal{P} a \mathcal{P}_{ij} pro $ij \in X$.

Označme $\mathcal{V}_i = \{A \in \mathcal{P}' : A \subseteq V_i\}$. Máme

$$q(\mathcal{P}') \geq \sum_{i < j} \sum_{A \in \mathcal{V}_i, B \in \mathcal{V}_j} q(A, B).$$

Dle Lemma 4 platí

$$\sum_{A \in \mathcal{V}_i, B \in \mathcal{V}_j} q(A, B) \geq q(V_i, V_j)$$

pro každé $i < j$. Navíc pro $ij \in X$ máme

$$\sum_{A \in \mathcal{V}_i, B \in \mathcal{V}_j} q(A, B) \geq \sum_{1 \leq o, p \leq 2} q(V_{i,j,o}, V_{j,i,p}) > q(V_i, V_j) + \varepsilon^4 |V_i| |V_j|$$

dle Lemma 6. Proto

$$q(\mathcal{P}') > \left(\sum_{i < j} q(V_i, V_j) \right) + |X| \varepsilon^4 N^2 \geq q(\mathcal{P}) + \varepsilon^5 s^2 N^2 \geq q(\mathcal{P}) + \frac{\varepsilon^5}{4} n^2.$$

Nyní \mathcal{P}' má nejvýše $s2^s$ neodpadných částí, ty ale mohou mít různé velikosti. Označme $f(s) = s4^s$. Rozdělme každou neodpadní část v \mathcal{P}' na co nejvíce kusů velikosti $\lfloor \frac{N}{4^s} \rfloor$, a zbytky rozdělme na jednoprvkové odpadní části. Tím dostáváme zjemnění \mathcal{P}'' , kde

- každá neodpadní část v \mathcal{P}'' má velikost $\lfloor \frac{N}{4^s} \rfloor$,
- počet neodpadných částí je nejvýše $f(s)$ a
- počet odpadních částí vzroste nejvýše o $s2^s \frac{N}{4^s} \leq s \frac{n/s}{2^s} = \frac{n}{2^s}$.

Dále $q(\mathcal{P}'') \geq q(\mathcal{P}') > q(\mathcal{P}) + \frac{\varepsilon^5}{4} n^2$.

Důkaz Regularity lemmatu. Vhodně zvolíme $s_0 \geq m_0$, viz níže, a

$$M = \max \left(\left\lfloor \frac{2}{\varepsilon} s_0 \right\rfloor, f(f(\dots f(s_0) \dots)) \right),$$

kde f je volána $\lfloor \frac{4}{\varepsilon^5} \rfloor$ -krát.

Jestliže G má méně než M vrcholů, pak G má ε -regulární rozklad na $|V(G)| \leq M$ částí velikosti 1. Jinak začneme s libovolným rozdělením vrcholů grafu G na $s_0 \geq m_0$ částí stejné velikosti a méně než $s_0 \leq \frac{\varepsilon}{2} n$ odpadních vrcholů. Opakujeme výše popsany postup, dokud nezískáme ε -regulární rozdělení.

Jelikož $0 \leq q(\mathcal{Q}) < n^2$ pro každé rozdělení \mathcal{Q} vrcholů G , počet opakování je nejvýše $\frac{4}{\varepsilon^5}$, a získáme tedy ε -regulární rozdělení s nejvýše M částmi.

Je ještě potřeba ověřit, že odpadní množina nebude příliš velká (jednak pro ověření ε -regularity vzniklého rozkladu, jednak pro zajištění korektnosti iterace výše popsaného postupu). V každé iteraci přibude nejvýše $\frac{n}{2^s} \leq \frac{n}{2^{s_0}}$ odpadních vrcholů. Po $\lfloor \frac{4}{\varepsilon^5} \rfloor$ iteracích je tedy nejvýše $\frac{4}{\varepsilon^5 2^{s_0}} n + \frac{\varepsilon}{2} n$ odpadních vrcholů, což je nejvýše εn , zvolíme-li

$$s_0 = \max \left(m_0, \left\lceil \log \frac{8}{\varepsilon^6} \right\rceil \right).$$

□