

1. Určete stromovou šířku grafů pravidelných mnohostěnů (4-stěn, krychle, 8-stěn, 12-stěn, 20-stěn).
2. Ukažte, že mřížka o rozměrech  $n \times n$  má stromovou šířku nejvýše  $n$ .
3. Ukažte, že každý rovinný graf je minorem nějaké mřížky.
4. Ukažte, že každý graf  $G$  s  $n$  vrcholy má stromový rozklad šířky  $\text{tw}(G)$  s nejvýše  $n$  vrcholy.
5. Nechť  $G$  je graf a  $W$  je množina vrcholů  $G$  velikosti  $2k + 1$ . Říkáme, že  $W$  je  $k$ -rozbitná, jestliže existuje  $X \subseteq V(G)$  velikosti nejvýše  $k$  tž. každá komponenta  $G - X$  obsahuje nejvýše  $k$  vrcholů z  $W$ . Ukažte, že má-li  $G$  stromovou šířku nejvýše  $k - 1$ , pak každá podmnožina  $V(G)$  velikosti  $2k + 1$  je  $k$ -rozbitná.
6. Nechť  $G$  je graf takový, že každá podmnožina  $V(G)$  velikosti  $2k + 1$  je  $k$ -rozbitná. Ukažte, že  $G$  má stromovou šířku nanejvýš  $3k$ .
7. Nechť  $G$  je graf a  $W$  je množina vrcholů  $G$  velikosti  $2k + 1$ . Nechť  $\mathcal{B} = \{X \subseteq V(G) : G[X] \text{ je souvislý a } |X \cap W| \geq k + 1\}$ . Ukažte, že  $\mathcal{B}$  je bramble, a že když  $W$  není  $k$ -rozbitná, pak bramble  $\mathcal{B}$  má řád alespoň  $k + 1$ .
8. Ukažte, že má-li graf stromovou šířku větší než  $3k$ , pak obsahuje brambli řádu alespoň  $k + 1$ .