

1. Dokažte, že pro každé kladné konstanty  $a$  a  $b$  tž.  $b < 2$  existuje přirozené číslo  $k$  takové, že nějaký graf barevnosti alespoň  $ak^b$  neobsahuje podrozdělení  $K_k$  jako podgraf.
2. Dokažte, že pro každé  $k \geq 3$  existuje neprázdný graf  $G$  s alespoň  $\frac{k^2}{16}|V(G)|$  hranami, který neobsahuje podrozdělení  $K_k$  jako podgraf (nápověda:  $G$  lze zvolit jako úplný bipartitní graf).
3. Nechť  $G$  je graf, nechť  $K \subseteq G$  je podrozdělení úplného grafu, nechť  $Q$  je množina větvicích vrcholů  $K$  (tj. vrcholů, jejichž stupeň v  $K$  je větší než 2), a nechť  $S$  je libovolná podmnožina vrcholů grafu  $G$  velikosti  $m$ . Nechť  $P$  je sjednocení  $m$  vrcholově disjunktních cest v  $G$  z  $S$  do  $Q$ , zvolené tak, že  $|E(P) \setminus E(K)|$  je nejmenší možné. Ukažte, že platí následující: jestliže  $q_1 \in Q$  není obsažen v  $P$ ,  $q_2 \in Q$  je obsažen v cestě  $P_2$  v  $P$ , a  $R$  je cesta  $K$  spojující  $q_1$  s  $q_2$ , pak  $V(P) \cap V(R) \subseteq V(P_2)$ , tj.  $P_2$  je jediná cesta z  $P$  protínající  $R$ .
4. Z předchozího cvičení vyvoďte, že je-li graf  $2k$ -souvěsly a obsahuje podrozdělení  $K_{3k}$ , pak je  $k$ -linkovaný.
5. Nalezňte co nejmenší přirozené číslo  $k$  takové, že každý nerovinný  $k$ -souvěsly graf je 2-linkovaný.
6. Definujme, že graf  $G$  je *hranově  $k$ -linkovaný*, jestliže pro každých  $2k$  navzájem různých vrcholů  $s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k$  v něm existují navzájem hranově disjunktní cesty  $P_1, \dots, P_k$ , kde  $P_i$  spojuje  $s_i$  s  $t_i$  pro  $i = 1, \dots, k$ . Ukažte, že každý hranově  $2k$ -souvěsly graf je hranově  $k$ -linkovaný (nápověda: všechny cesty  $P_1, \dots, P_k$  mohou procházet přes jeden vrchol).
7. Nalezňte hranově 2-souvěsly graf, který není hranově 2-linkovaný.