

# Eulerova a Heawoodova formule

31. března 2021

## Definice

**Eulerovský rod**  $g(\Sigma)$  plochy  $\Sigma$  vzniklé přidáním  $k$  křížítek a  $u$  uch na sféru je

$$g(\Sigma) := k + 2u.$$

**Eulerovská charakteristika**  $\chi(\Sigma) = 2 - g(\Sigma)$ .

Plocha	Eulerovský rod	Eulerovská charakteristika
sféra $\Sigma_0$	0	2
projektivní rovina $\Pi_1$	1	1
torus $\Sigma_1$	2	0
Kleinova láhev $\Pi_2$	2	0
double-torus $\Sigma_2$	4	-2
$\Sigma_u$	$2u$	$2 - 2u$
$\Pi_k$	$k$	$2 - k$

## Věta (Zobecněná Eulerova formule)

*Nechť  $G$  je nakreslený na ploše  $\Sigma$ . Pak*

$$|E(G)| \leq |V(G)| + |F(G)| + g(\Sigma) - 2 = |V(G)| + |F(G)| - \chi(\Sigma).$$

*Rovnost nastává právě když nakreslení  $G$  je buňkové (každá stěna je otevřený disk).*

## Důsledek

*Nechť  $G$  je nakreslený na ploše  $\Sigma$  a má alespoň 3 vrcholy.*

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| + 3g(\Sigma) - 6 = 3|V(G)| - 3\chi(\Sigma).$$

*Rovnost nastává právě když  $G$  je triangulace  $\Sigma$  (každá stěna je otevřený disk ohraničený cyklem délky 3).*

$$H(\Sigma) := \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 24g(\Sigma)}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(\Sigma)}}{2} \right\rfloor$$

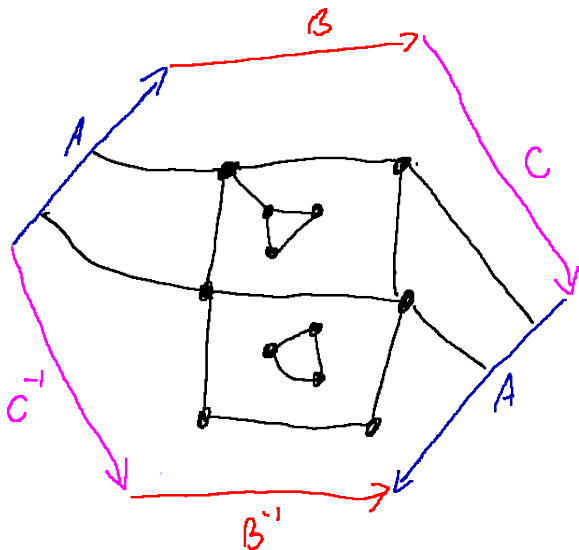
### Věta (Heawoodova formule)

*Každý graf nakreslený na ploše  $\Sigma \neq \Sigma_0$  obsahuje vrchol stupně nejvýše  $H(\Sigma) - 1$ , a lze ho tedy obarvit  $H(\Sigma)$  barvami.*

### Věta (Ringel, Youngs, ...)

*Na plochu  $\Sigma \neq \Pi_2$  lze nakreslit  $K_{H(\Sigma)}$ .*

Jaké stěny má následující nakreslení grafu na plochu? Určete také Eulerovu charakteristiku této plochy.



Nechť  $G$  je nakreslený na ploše  $\Sigma$  a má alespoň 3 vrcholy.  
Ukažte, že ze zobecněné Eulerovy formule plyne

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 3\chi(\Sigma),$$

a jestliže  $G$  neobsahuje trojúhelník, pak

$$|E(G)| \leq 2|V(G)| - 2\chi(\Sigma).$$

Ukažte, že jestliže

$$n > 6 - 2\chi(\Sigma),$$

pak  $K_{3,n}$  nelze nakreslit na plochu  $\Sigma$ .

Ukažte, že na plochu  $\Sigma_u$  lze nakreslit  $K_{3,2+2u} = K_{3,4-\chi(\Sigma_u)}$ .

Ukažte, že libovolné nakreslení  $K_7$  na plochu Eulerovské charakteristiky 0 je triangulace (buňkové a každá stěna je ohraničená cyklem délky 3).