Vybíravost grafů, Nullstellensatz, jádra

Zdeněk Dvořák

10. prosince 2018

1 Vybíravost

Přiřazení seznamů grafu G je funkce L, která každému vrcholu G přiřadí množinu barev. *L-obarvení* je dobré obarvení φ grafu G tž. $\varphi(v) \in L(v)$ pro každý vrchol $v \in V(G)$. *Vybíravost* $\chi_l(G)$ je nejmenší přirozené číslo k takové, že G je L-obarvitelný pro každé přiřazení L seznamů velikosti alespoň k.

Pozorování 1.

$$\begin{aligned}\chi_l(G) &\geq \chi(G)\\ \chi_l(G) &\leq d+1 \textit{ je-li } G \textit{ } d\textit{-degenerovaný}\\ \chi_l(C_n) &= \chi(C_n)\end{aligned}$$

Lemma 2.

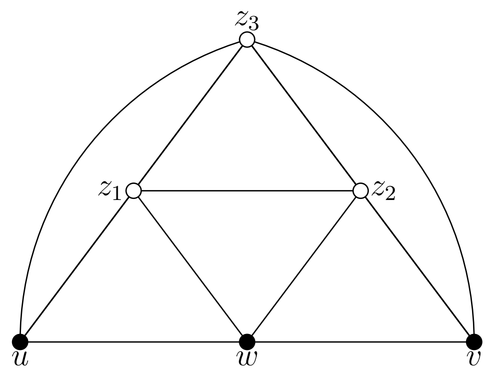
$$\chi_l(K_{n,n^n}) > n.$$

Důkaz. Nechť vrcholy jsou $v_1, \ldots, v_n$ a $w_{i_1,\ldots,i_n}$ pro $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, n\}$. Vrcholu v_k přiřadíme seznam $L(v_k) = \{c_{k,1}, \ldots, c_{k,n}\}$. Vrcholům $w_\star$ přiřadíme všechny n-prvkové seznamy, které protínají seznam každého z vrcholů $v_1, \ldots, v_n$ v právě jednom prvku; tedy $L(w_{i_1,\ldots,i_n}) = \{c_{1,i_1}, c_{2,i_2}, \ldots, c_{n,i_n}\}$. Obarvíme-li vrcholy $v_1, \ldots, v_n$ barvami $c_{1,i_1}, \ldots, c_{n,i_n}$, pak nelze obarvit $w_{i_1,\ldots,i_n}$ z jeho seznamu. □

2 Vybíravost rovinných grafů

Lemma 3. *Existují rovinné grafy vybíravosti alespoň 5.*

Důkaz. Nechť G_{uwv} je následující graf:



Nechť $L_{1,p,a}$ je přiřazení seznamů tž. $L_{1,p,a}(z_1) = \{1, p, 5, 6\}$, $L_{1,p,a}(z_2) = \{a, p, 5, 6\}$ a $L_{1,p,a}(z_3) = \{1, a, 5, 6\}$. Pak předbarvení (u, w, v) barvami $(1, p, a)$ nelze rozšířit na $L_{1,p,a}$-obarvení grafu G_{uwv}.

Nechť G_{uv} je graf vzniklý ze dvou kopií G_{uwv} sdílejících cestu uwv. Nechť $L_{1,a}$ je přiřazení seznamů odpovídající $L_{1,p,a}$ v jedné z kopií a $L_{1,q,a}$ ve druhé a $L_{1,a}(w) = \{1, a, p, q\}$. Pak předbarvení (u, v) barvami $\{1, a\}$ nelze rozšířit na $L_{1,a}$-obarvení grafu G_{uv}.

Nechť G vznikne z 16 kopií G_{uv} sdílejících vrcholy u a v. Nechť $L(u) = \{1, 2, 3, 4\}$, $L(v) = \{a, b, c, d\}$, a L odpovídá $L(i, l)$ pro $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ a $l \in \{a, b, c, d\}$ na 16 kopiích G_{uv}. Pak G není L-obarvitelný. $\square$

Věta 4 (Thomassen)**.** *Každý rovinný graf je* 5*-vybíravý. Platí i následující silnější tvrzení: nechť G je rovinný graf, P je cesta s nejvýše dvěma vrcholy obsažená v hranici vnější stěny G, a L je přiřazení seznamů velikosti* 5 *vrcholům G nesousedícím s vnější stěnou, seznamů velikosti* 3 *vrcholům G nepatřícím do P a sousedícím s vnější stěnou, a jednoprvkových navzájem různých seznamů vrcholům P. Pak G je L-obarvitelný.*

Důkaz. Indukcí dle $|V(G)|$. Bez újmy na obecnosti G je souvislý. Je také 2-souvislý, jinak uvažme $G = G_1 \cup G_2$, kde G_1 a G_2 se protínají v jednom vrcholu v a $P \subseteq G_1$. Z indukčního předpokladu lze L-obarvit G_1, změnit seznam v na jednoprvkový daný obarvením G_1 a rozšířit obarvení na G_2. Nechť K je kružnice ohraničující vnější stěnu G. Lze předpokládat, že K je indukovaná: jinak by měla chordu uv a $G = G_1 \cup G_2$ pro vlastní podgrafy G_1 a G_2 protínající se v hraně uv, tž. $P \subseteq G_1$. Z indukčního předpokladu lze L-obarvit G_1, změnit seznamy u a v na jednoprvkové dané obarvením G_1 a rozšířit obarvení na G_2. Lze také předpokládat $|V(P)| = 2$, jinak můžeme smazat barvy ze seznamu některého vrcholu K.

Nechť $V(P) = \{p, q\}$ a v je soused p v K různý od q. Nechť $\{a, b\} \subseteq L(v) \setminus L(p)$ jsou dvě libovolné barvy. Nechť L' je přiřazení seznamů tž. $L'(x) = L(x) \setminus \{a, b\}$ pro sousedy x vrcholu $v$neležící na K, a $L'(x) = L(x)$ pro ostatní vrcholy x. Pak $G - v$ je L'-obarvitelný z indukčního předpokladu a vrcholu v lze dát barvu a nebo b jinou než barva jeho souseda v K různého od p (jelikož K je indukovaný cyklus, v má právě dva sousedy v K). $\square$

3 Nullstellensatz

Použijeme následující základní tvrzení z algebry (lze dokázat indukcí dle počtu proměnných).

Lemma 5. *Nechť $p(x_1, \ldots, x_n)$ je polynom v n proměnných, v němž každý výskyt proměnné x_i má stupeň nejvýše d_i pro $i \in \{1, \ldots, n\}$, a nechť S_i je množina komplexních čísel velikosti alespoň $d_i + 1$. Jestliže $p \neq 0$, pak existují hodnoty $s_1 \in S_1$, ..., $s_n \in S_n$ tž. $p(s_1, \ldots, s_n) \neq 0$.*

Nechť G je neorientovaný graf s vrcholy $\{v_1, \ldots, v_n\}$ a $\vec{G}$ je jeho libovolná orientace. Grafový polynom $P_{\vec{G}}$ je definován jako

$$P_{\vec{G}}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{(v_i, v_j) \in E(\vec{G})} (x_j - x_i).$$

Povšimněme si, že $P_{\vec{G}}(c_1, \ldots, c_n) \neq 0$ právě když funkce přiřazující vrcholům G barvy c_1, ..., c_n je dobré obarvení G.

Věta 6. *Nechť G je neorientovaný graf s vrcholy $\{v_1, \ldots, v_n\}$ a $\vec{G}$ je jeho libovolná orientace. Nechť d_1, ..., d_n jsou přirozená čísla a L je přiřazení seznamů G tž. $|L(v_i)| > d_i$ pro $1 \leq i \leq n$. Jestliže se člen $x_1^{d_1} \ldots x_n^{d_n}$ se v polynomu $P_{\vec{G}}$ vyskytuje s nenulovým koeficientem, pak G je L-obarvitelný.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti $|L(v_i)| = d_i + 1$ a prvky $L(v_i)$ jsou komplexní čísla. Zadefinujme $p_i(x) = \prod_{c \in L(v_i)} (x - c)$ pro $i = 1, \ldots, n$. Pak $p_i(c) = 0$ pro všechna $c \in L(v_i)$. Nechť $q_i = x^{d_i+1} - p_i$; pak q_i je polynom stupně nejvýše d_i a $q_i(c) = c^{d_i+1}$ pro všechna $c \in L(v_i)$. Nechť P je polynom vzniklý z $P_{\vec{G}}$ opakovanou substitucí q_i za x^{d_i+1} pro $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pak $P(c_1, \ldots, c_n) = P_{\vec{G}}(c_1, \ldots, c_n)$ pro libovolná $c_1 \in L(v_1)$, ..., $c_n \in L(v_n)$ a stupeň proměnné x_i v P je nejvýše d_i. Navíc koeficient $x_1^{d_1} \ldots x_n^{d_n}$ je stejný v P jako v $P_{\vec{G}}$, jelikož všechny členy $P_{\vec{G}}$ mají stejný celkový stupeň (rovný $|E(G)|$) a substituce vytváří pouze členy menšího stupně. Proto $P \neq 0$ a $P_{\vec{G}}(c_1, \ldots, c_n) = P(c_1, \ldots, c_n) \neq 0$ pro nějaké $c_1 \in L(v_1)$, ..., $c_n \in L(v_n)$ z Lemmatu 5. Pak obarvení vrcholů G barvami c_1, ..., c_n je dobré L-obarvení. $\square$

Nechť $\vec{G}$ je pevná orientace grafu G, a nechť $\vec{G}'$ je orientace G, která se od $\vec{G}$ liší na právě p hranách. Pak definujme $\mathrm{sgn}(\vec{G}') = (-1)^p$.

Pozorování 7. *Nechť G je neorientovaný graf s vrcholy $\{v_1, \ldots, v_n\}$ a $\vec{G}$ je jeho libovolná pevná orientace. Nechť $\mathcal{O}_{d_1,\ldots,d_n}$ je množina všech orientací grafu G v nichž v_i má vstupní stupeň d_i pro $i = 1, \ldots, n$. Koeficient členu $x_1^{d_1} \ldots x_n^{d_n}$ v polynomu $P_{\vec{G}}$ je až na znaménko roven*

$$\sum_{\vec{G}' \in \mathcal{O}_{d_1,\ldots,d_n}} \operatorname{sgn}(\vec{G}').$$

Každé dvě orientace se stejnými vstupními stupni se liší obrácením hran v nějakém Eulerovském podgrafu. Dostáváme tedy následující.

Důsledek 8. *Nechť G je neorientovaný graf s vrcholy $\{v_1, \ldots, v_n\}$ a $\vec{G}$ je jeho libovolná orientace tž. v_i má vstupní stupeň d_i pro každé i. Nechť $\mathcal{E}$ je množina všech podmnožin $E(\vec{G})$ tvořících Eulerovský podgraf. Pak koeficient členu $x_1^{d_1} \ldots x_n^{d_n}$ v polynomu $P_{\vec{G}}$ je až na znaménko roven*

$$\sum_{X \in \mathcal{E}} (-1)^{|X|}.$$

Je-li G bipartitní, pak každý Eulerovský podgraf jeho orientace má sudý počet hran (a nějaký takový existuje – prázdný), proto dostáváme následující.

Důsledek 9. *Nechť G je neorientovaný bipartitní graf s vrcholy $\{v_1, \ldots, v_n\}$ a $\vec{G}$ je jeho libovolná orientace tž. v_i má vstupní stupeň d_i pro každé i. Pak koeficient členu $x_1^{d_1} \ldots x_n^{d_n}$ v polynomu $P_{\vec{G}}$ je nenulový, a tedy G lze L-obarvit pro libovolné přiřazení seznamů L tž. $|L(v_i)| > d_i$ pro každé i.*

Z Hallovy věty snadno dostáváme, že graf má orientaci s vstupním stupněm nejvýše d právě když každý podgraf H splňuje $|E(H)| \leq d|V(H)|$.

Důsledek 10. *Je-li G bipartitní graf a každý $H \subseteq G$ splňuje $|E(H)| \leq d|V(H)|$, pak G je $(d+1)$-vybíravý.*

Speciálně rovinné bipartitní grafy jsou 3-vybíravé.

4 Hranová vybíravost rovinných 3-regulárních grafů

Nechť G je rovinný 3-regulární a H je jeho linegraf. Orientaci $\vec{H}$ zvolme tak, že jsou-li e_1, e_2, e_3 hrany incidentní s jedním vrcholem v pořadí po směru hodinových ručiček v nakreslení G, pak $(e_1, e_2), (e_2, e_3), (e_3, e_1) \in E(\vec{H})$. Znaménka budeme určovat vůči této orientaci.

Uvažme libovolnou orientaci $\vec{H}'$ grafu H se vstupními (a výstupními) stupni 2. Pro $v \in V(G)$ definujme $r_v(\vec{H}')$ jako orientaci H vzniklou obrácením orientací hran H spojujících hrany G incidentní s v. Pro $X = \{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq V(G)$ definujme $r_X(\vec{H}')$ jako $r_{x_1}(r_{x_2}(\ldots r_{x_m}(\vec{H}')\ldots))$. Zjevně $\mathrm{sgn}(r_X(\vec{H}')) = (-1)^{|X|}\mathrm{sgn}(\vec{H}')$. Nechť $G(\vec{H}')$ je částečná orientace G definovaná následovně: Pro každou hranu $e = uv$, Jestliže hrany vycházející ve $\vec{H}'$ z e jsou incidentní s v, pak e je orientována směrem k v, jsou-li incidentní s u, pak e je orientována směrem k u, jinak je hrana e neorientovaná. Povšimněme si, že orientované hrany $G(\vec{H}')$ tvoří sjednocení orientovaných cyklů. Jestliže $G(\vec{H}')$ obsahuje vrchol v incidentní jen s neorientovanými hranami, nechť v je nejmenší takový vrchol (v libovolném fixním uspořádání $V(G)$) a definujme $b(\vec{H}') = r_v(\vec{H}')$. Jestliže $G(\vec{H}')$ neobsahuje takový vrchol, ale obsahuje lichý orientovaný cyklus, nechť X je množina vrcholů takového cyklu s nejmenším prvkem, a definujme $b(\vec{H}') = r_X(\vec{H}')$. Jinak $b(\vec{H}') = \vec{H}'$. Povšimněme si, že b je involuce a jestliže $b(\vec{H}') \neq \vec{H}'$, pak $\mathrm{sgn}(b(\vec{H}') = -\mathrm{sgn}(b(\vec{H}'))$. Nechť $\mathcal{P}$ je množina všech orientací $\vec{H}' \in \mathcal{O}_{2,\ldots,2}$ grafu H tž. vrcholy $G(\vec{H}')$ jsou pokryty sudými orientovanými cykly. Dostáváme

$$\sum_{\vec{H}' \in \mathcal{O}_{2,\ldots,2}} \mathrm{sgn}(\vec{H}') = \sum_{\vec{H}' \in \mathcal{P}} \mathrm{sgn}(\vec{H}').$$

Pro $\vec{H}' \in \mathcal{P}$ a orientovaný cyklus C v $G(\vec{H}')$ definujme $o(C)$ jako počet neorientovaných hran $G(\vec{H}')$ vedoucích do neomezené stěny C, a $o(\vec{H}')$ jakožto součet $o(C)$ přes všechny orientované cykly $G(\vec{H}')$. Pak nahlédneme, že

$$\mathrm{sgn}(\vec{H}') = (-1)^{o(\vec{H}')}.$$

Povšimněme si, že $o(C)$ je sudé (vrcholy G vně C jsou pokryty cykly sudé délky, jejich počet je tedy sudý, a kontrakcí C a jeho vnitřku do jednoho vrcholu musí vzniknout graf se sudým počtem vrcholů lichého stupně). Proto i $o(\vec{H}')$ je sudé, a máme tedy $\mathrm{sgn}(\vec{H}') = 1$ pro každé $\vec{H}' \in \mathcal{P}$. Proto

$$\sum_{\vec{H}' \in \mathcal{O}_{2,\ldots,2}} \mathrm{sgn}(\vec{H}') = |\mathcal{P}|.$$

Má-li G hranové 3-obarvení, pak $\mathcal{P} \neq \emptyset$: Hrany barev 2 a 3 tvoří sjednocení sudých cyklů pokývajících $V(G)$, každý z těchto cyklů naorientujme, čímž dostáváme částečnou orientaci $\vec{G}$. Pro ni existuje právě jedna orientace $\vec{H}' \in \mathcal{P}$ tž. $G(\vec{H}') = \vec{G}$. Z Věty 6 dostáváme následující tvrzení.

Důsledek 11. *Je-li G rovinný 3-regulární hraf hranové barevnosti 3 a H je jeho linegraf, pak $\chi_l(H) = 3$.*

Věta o 4 barvách je ekvivalentní tvrzení, že každý rovinný 3-regulární hraf bez mostů má hranovou barevnost 3.

Důsledek 12. *Je-li G rovinný 3-regulární hraf bez mostů a H je jeho linegraf, pak $\chi_l(H) = 3$.*

5 Jádra

Množina $S \subseteq V(\vec{G})$ je *dominující*, jestliže $N^+[S] = V(\vec{G})$. *Jádro* je nezávislá dominující podmnožina.

Lemma 13. *Nechť G je graf s vrcholy $\{v_1, \ldots, v_n\}$ a $\vec{G}$ je jeho libovolná orientace tž. v_i má vstupní stupeň d_i pro každé i. Jestliže každý indukovaný podgraf $\vec{G}$ má jádro, pak G lze L-obarvit pro libovolné přiřazení seznamů L tž. $|L(v_i)| > d_i$ pro každé i.*

Důkaz. Indukcí dle počtu vrcholů G. Nechť c je libovolná barva vyskytující se v seznamu alespoň jednoho vrcholu G. Nechť Z je množina vrcholů G, jejichž seznam obsahuje c. Nechť S je jádro $\vec{G}[Z]$. Nechť $L'(v) = L(v) \setminus \{c\}$ pro každý vrchol $v \in V(G) \setminus S$. Jestliže $v_i \notin S$, pak v_i má ve $\vec{G} - S$ vstupní stupeň $d_i - 1$ jestliže $v_i \in Z$ (jelikož S dominuje Z) a vstupní stupeň nejvýše d_i jinak; proto $|L'(v_i)| \le \deg^-_{\vec{G}-S}(v_i)$. Z indukčního předpokladu je $G - S$ L'-obarvitelný, a přiřadíme-li barvu c všem vrcholům S, dostáváme L-obarvení G. $\square$

Lemma 14. *Nechť $\vec{G}$ je sjednocením tranzitivně orientovaných grafů $\vec{G}_1$ a $\vec{G}_2$ se stejnou množinou vrcholů. Jestliže orientace $\vec{G}_1$ je acyklická, pak $\vec{G}$ má jádro.*

Důkaz. Indukcí dle počtu vrcholů G. Nechť Z je množina vrcholů, které mají v $\vec{G}_1$ vstupní stupeň 0. Jelikož $\vec{G}_1$ je tranzitivně acyklicky orientovaný, Z je jádro $\vec{G}_1$. Je-li Z nezávislá množina v $\vec{G}$, pak Z je jádro $\vec{G}$. Jinak existuje hrana $(u, v) \in E(\vec{G}_2)$ s $u, v \in Z$. Z indukčního předpokladu má $\vec{G} - v$ jádro S. Máme $u \in N^+_{\vec{G}}(S)$, a jelikož u má ve $\vec{G}_1$ vstupní stupeň 0, platí $u \in N^+_{\vec{G}_2}(S)$. Jelikož orientace $\vec{G}_2$ je tranzitivní, platí tedy i $v \in N^+_{\vec{G}_2}(S)$, a proto $N^+_{\vec{G}}(S) = V(G)$. Množina S je tedy i jádro $\vec{G}$. $\square$

Důsledek 15. *Libovolná orientace bipartitního grafu G má jádro.*

Důkaz. Nechť A a B jsou partity G. Jako $\vec{G}_1$ označíme hrany z A do B, jako $\vec{G}_2$ hrany z B do A, a aplikujeme Lemma 14. $\square$

Z Lemma 13 tedy plyne další důkaz Důsledku 10.

Důsledek 16. *Nechť G je bipartitní multigraf s partitami V_1 a V_2 a nechť H je jeho linegraf. Nechť $\prec_1$ a $\prec_2$ jsou libovolná částečná uspořádání $E(G)$ tž. hrany incidentní se stejným vrcholem ve V_i jsou porovnatelné v $\prec_i$ pro $i \in \{1, 2\}$. Nechť $\vec{H}$ je orientace H tž. $(e_1, e_2) \in E(\vec{H})$ právě když $e_1 \prec_1 e_2$ nebo $e_1 \prec_2 e_2$. Pak $\vec{H}$ má jádro.*

Věta 17 (Galvin)**.** *Je-li H linegraf bipartitního grafu G, pak $\chi_l(H) = \chi(H)$.*

Důkaz. Nechť φ je obarvení H pomocí barev $\{1, \ldots, \chi(H)\}$. Nechť V_1 a V_2 jsou partity G. Pro hrany $e_1, e_2 \in E(G)$ incidentní se stejným vrcholem ve V_1 nadefinujme $e_1 \prec_1 e_2$ právě když $\varphi(e_1) < \varphi(e_2)$. Pro hrany $e_1, e_2 \in E(G)$ incidentní se stejným vrcholem ve V_2 nadefinujme $e_1 \prec_2 e_2$ právě když $\varphi(e_1) > \varphi(e_2)$. Jelikož H je dobré obarvení H, hrany G incidentní se stejným vrcholem ve V_i jsou porovnatelné v $\prec_i$ pro $i \in \{1, 2\}$. Nechť $\vec{H}$ je orientace H tž. $(e_1, e_2) \in E(\vec{H})$ právě když $e_1 \prec_1 e_2$ nebo $e_1 \prec_2 e_2$. Dle Důsledku 16 má $\vec{H}$ jádro. Navíc hrana e je větší v $\prec_1$ než nejvýše $\varphi(e) - 1$ hran, a větší v $\prec_2$ než nejvýše $\chi(H) - \varphi(e)$ hran, a tedy $\vec{H}$ má vstupní stupně nejvýše $\chi(H) - 1$. Tvrzení tedy platí dle Lemma 13. □

Poznámka: Je hypotéza, že toto platí pro libovolné linegrafy, či dokonce pro libovolné spáruprosté grafy.

Poznámka: $\chi(H) = \Delta(G)$, jelikož z Hallovy věty G má párování pokrývající vrcholy stupně $\Delta(G)$ a opakovaným odebíráním takového párování lze získat hranové $\Delta(G)$-obarvení.