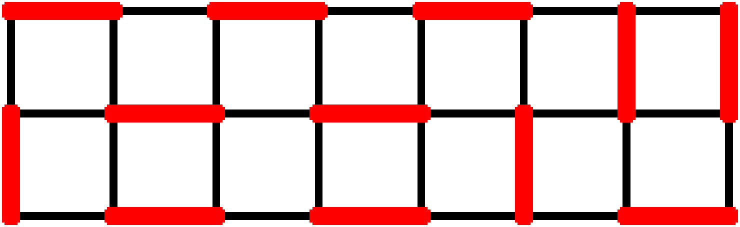
Počítání:

- Burnsideovo lemma
- rekurence
- princip inkluze a exkluze
- ...

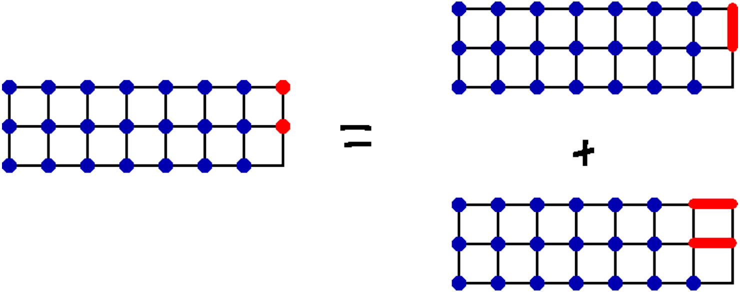
Zadání

Určete počet perfektních párování mřížky $3 \times n$.



Pro $S \subseteq \{1, 2, 3\}$,

$a_{S,n}$ =počet párování pokrývajících v posledním sloupci právě řádky z S



$$a_{\{1,2\},1} = 1$$
$$a_{\{1,2\},n} = a_{\{1,2,3\},n-1} + a_{\{3\},n-1}$$

$$
\begin{aligned}
a_{\emptyset,n} &= a_{\{1,2,3\},n-1} \\
a_{\{1\},n} &= a_{\{2,3\},n-1} \\
a_{\{2\},n} &= a_{\{1,3\},n-1} \\
a_{\{3\},n} &= a_{\{1,2\},n-1} \\
a_{\{1,2\},n} &= a_{\{1,2,3\},n-1} + a_{\{3\},n-1} \\
a_{\{2,3\},n} &= a_{\{1,2,3\},n-1} + a_{\{1\},n-1} \\
a_{\{1,3\},n} &= a_{\{2\},n-1} \\
a_{\{1,2,3\},n} &= a_{\emptyset,n-1} + a_{\{1\},n-1} + a_{\{3\},n-1}
\end{aligned}
$$

$$\begin{pmatrix} a_{\emptyset,n} \\ a_{\{1\},n} \\ a_{\{2\},n} \\ a_{\{3\},n} \\ a_{\{1,2\},n} \\ a_{\{2,3\},n} \\ a_{\{1,3\},n} \\ a_{\{1,2,3\},n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{\emptyset,n-1} \\ a_{\{1\},n-1} \\ a_{\{2\},n-1} \\ a_{\{3\},n-1} \\ a_{\{1,2\},n-1} \\ a_{\{2,3\},n-1} \\ a_{\{1,3\},n-1} \\ a_{\{1,2,3\},n-1} \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_n = A\vec{a}_{n-1}$$
$$\vec{a}_n = A^{n-1}\vec{a}_1$$

Zadání

Fibonacci pěstuje králíky. Na záčátku má jednoho právě narozeného králíka. Každý rok se každý králík rozmnoží a vyprodukuje nového králíka. Po dvou letech králík zemře. Navíc po i-tém roce (pro $i = 1, 2, \ldots$) dostane Fibonacci darem i^2 novorozených králíků. Kolik má Fibonacci po n letech králíků?

$a_i, b_i =$ počet novorozených, resp. 1-letých, králíků po i-tém roce.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1, b_0 = 0 \\
a_1 &= 2, b_0 = 1 \\
a_i &= a_{i-1} + b_{i-1} + i^2 \\
b_i &= a_{i-1} \\
a_i &= a_{i-1} + a_{i-2} + i^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_i &= i = d_{i-1} + 1 \\
c_i &= i^2 = (i-1)^2 + 2i + 1 = c_{i-1} + 2d_i + 1 \\
c_{i+1} &= c_i + 2d_{i+1} + 1 \\
a_i &= a_{i-1} + a_{i-2} + c_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} a_i \\ a_{i-1} \\ c_{i+1} \\ d_{i+2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{i-1} \\ a_{i-2} \\ c_i \\ d_{i+1} \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Zadání

Máme zadána celá čísla m, k, a $c_i > 0$ a a_i pro $i = 1, \ldots, m$. Určete počet celočíselných řešení rovnice

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_m x_m = k,$$

kde $x_i \geq a_i$ pro $i = 1, \ldots, m$

- Nechť $y_i = x_i - a_i$, a tedy $y_i \geq 0$; chceme počet řešení

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_m y_m = n$$

  pro $n = k - c_1 a_1 - \ldots - c_m a_m$.
- Počet řešení $r_n =$ koeficient u z^n v

$$R = (1 + z^{c_1} + z^{2c_1} + \ldots)(1 + z^{c_2} + z^{2c_2} + \ldots)\cdots(1 + z^{c_m} + \ldots)$$
$$= \frac{1}{(1 - z^{c_1})(1 - z^{c_2})\cdots(1 - z^{c_m})} = \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^{d} b_j z^j}$$

Máme

$$R - \sum_{j=1}^{d} b_j z^j R = 1,$$

a tedy pro $n \geq 1$,

$$r_n = \sum_{j=0}^{d} b_j r_{n-j},$$

kde $r_i = 0$ pro $i < 0$ a $r_0 = 1$.

$$\begin{pmatrix} r_n \\ r_{n-1} \\ r_{n-2} \\ \dots \\ r_{n-d+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_d \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zadání

Počet dobrých uzávorkování používajících n otevíracích a n zavíracích závorek?

$$(\underbrace{(()())()}_{i})\underbrace{()()}_{n-i-1}$$

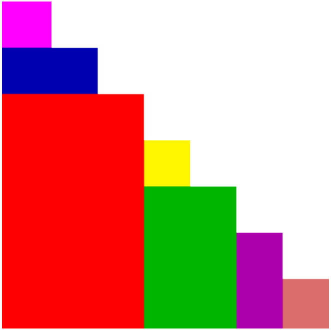
$$z_0 = 1$$

$$z_n = \sum_{i=0}^{n-1} z_i z_{n-i-1}$$

$$z_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

Zadání

Počet způsobů, jak rozložit "schodiště" o hranách délky n na n obdélníků?

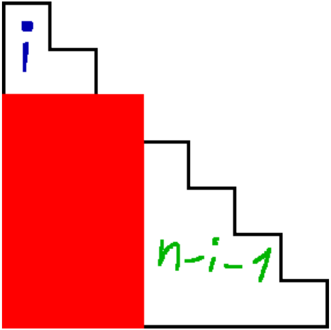


- Každý se schodů patří do jednoho obdélníku.
- Obdélník obsahující dolní roh dělí úlohu na dvě podschodiště.

$$s_0 = 1$$

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} s_i s_{n-i-1}$$

$$s_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$



Další problémy s výsledkem $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$:

- Binární stromy s $n+1$ listy.
- Zakořeněné stromy s daným pořadím potomků, s $n+1$ vrcholy.
- Cesty v mřížce z $(0,0)$ do (n,n) jdoucí doprava nebo nahoru a zůstávající pod diagonálou.
- Triangulace konvexního $(n+2)$-úhelníku.
- …