Zadání

Pro $k = 2, 3, \ldots, n$ *určete*

- *nejmenší prvočíslo p, které dělí* k*,*
- *největší m tž.* p^m *dělí* k*,*
- *a číslo* $z = k/p^m$*.*

Příklad: $k = 45 = 3^2 \cdot 5$

- $p = 3$
- $m = 2$
- $z = 5$

Dynamické programování:

- pro $a = 2, \dots, n$ a
- pro každé prvočíslo q tž.
  - žádné prvočíslo menší než q nedělí a a
  - $aq \leq n$,
- vyplníme hodnoty pro $k = aq$: $p[aq] = q$ a
  - Jestliže q nedělí a, pak $m[aq] = 1$ a $z[aq] = a$.
  - Jestliže q dělí a, pak $m[aq] = m[a] + 1$ a $z[aq] = z[a]$.

Poznámky:

- „žádné prvočíslo menší než q nedělí a“: $q \leq p[a]$.
- „q dělí a“: $p[a] = q$.
- a je prvočíslo: Hodnota $p[a]$ zatím nebyla vyplněna.

Časová složitost: $O(n)$

```
vector<int> p(n+1, 0), m(n+1), z(n+1), prvocisla;
for (a = 2; a <= n; a++) {
  if (p[a] == 0) { p[a] = a;
                   m[a] = z[a] = 1;
                   prvocisla.push_back (a);}
  for (q : prvocisla) {
    if (q > p[a] || q * a > n) break;
    p[q * a] = q;
    if (p[a] == q) {m[q * a] = m[a] + 1;
                    z[q * a] = z[a];}
               else {m[q * a] = 1;
                    z[q * a] = a;}
  }
}
```

Zadání

Určete počet dvojic (a, b), kde $1 \leq a \leq b \leq n$ a a dělí b.

$d[b]$: Počet dělitelů b; chceme

$$\sum_{b=1}^{n} d[b].$$

Dynamické programování: $d[b] = (m[b] + 1) \cdot d(z[b])$.

Möbiova funkce:

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^a & \text{jestliže } n \text{ je součin } a \text{ prvočísel} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Výpočet:

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{jestliže } m[n] > 1 \\ -\mu(z[n]) & \text{jinak} \end{cases}$$

Základní vlastnost:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } n = 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Zadání

Určete počet dvojic (a, b) tž. $1 \le a, b \le n$ a a a b jsou nesoudělná čísla.

$$
\begin{aligned}
\sum_{1 \le a,b \le n} [\gcd(a, b) = 1] &= \sum_{1 \le a,b \le n} \sum_{d \mid \gcd(a,b)} \mu(d) \\
&= \sum_{1 \le a,b \le n} \sum_{d \mid a,b} \mu(d) \\
&= \sum_{d=1}^{n} \sum_{d \mid a,b \le n} \mu(d) \\
&= \sum_{d=1}^{n} \lfloor n/d \rfloor^2 \mu(d).
\end{aligned}
$$