Základní funkce

Singleton

$$a_i x^i \longleftrightarrow (0, 0, \dots, 0, a_i, 0, \dots)$$

Jednotková posloupnost

$$\frac{1}{1-x} \longleftrightarrow \big(1\big)_i^\infty$$

Konečný úsek jednotkové posloupnosti ($n+1$ jedniček)

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \longleftrightarrow (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$$

Geometrická řada

$$\frac{c}{1-\lambda x} \longleftrightarrow \big(c\lambda^i\big)_i^\infty$$

Indexy

$$\frac{x}{(1-x)^2} \longleftrightarrow \big(i\big)_i^\infty$$

Posloupnost kombinačních čísel (nulová po prvních $n+1$ členech)

$$(a+bx)^n \longleftrightarrow \left(\binom{n}{i} a^{n-i} b^i\right)_i^\infty$$

Operace

Posuny (doleva, doprava)

$$\frac{a(x)-a_0}{x} \longleftrightarrow \big(a_{i+1}\big)_i^\infty \qquad x^k a(x) \longleftrightarrow \big(a_{i-k}\big)_i^\infty$$

Lineární kombinace

$$ca(x) \longleftrightarrow \big(ca_i\big)_i^\infty \qquad a(x)+b(x) \longleftrightarrow \big(a_i+b_i\big)_i^\infty$$

Dosazení (exponenciála a rozestup)

$$a(cx) \longleftrightarrow \big(c^i a_i\big)_i^\infty \qquad a(x^c) \longleftrightarrow \text{„}\big(a_{i/c}\big)_i^\infty\text{“}$$

Derivace, integrál

$$a'(x) \longleftrightarrow \big((i+1)a_{i+1}\big)_i^\infty \qquad \int_0^x a(t)dt \longleftrightarrow \big(\frac{1}{i}a_{i-1}\big)_i^\infty$$

Konvoluce, částečné součty

$$a(x)b(x) \longleftrightarrow \big(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}\big)_i^\infty \qquad \frac{a(x)}{1-x} \longleftrightarrow \big(\sum_{j=0}^{i} a_j\big)_i^\infty$$

Počítání koeficientů

Obecné kombinační číslo, $n \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_0^+$

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} n - i$$

Obecná binomická věta $(a, b, n \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_0^+)$

$$(ax + b)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} x^i$$

speciálně

$$[x^k](1 + cx)^n = \binom{n}{k} c^k$$

Zjednodušení pro záporné exponenty

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{n-1}$$

Záporná binomická věta (pro záporný exponent a mínus před x)

$$(1 - cx)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-1)^k c^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n-1} c^k x^k$$

speciálně

$$[x^k](1 - cx)^{-n} = \binom{n+k-1}{n-1} c^k$$

Počítání sum

Řada částečných součtů

Pro sumu $\sum_{i=0}^{n} a_i$ určíme vytvořující funkci $a(x) \leftrightarrow \big(a_i\big)_i^\infty$
Odvodíme funkci částečných součtů (konvolucí s jednotkovou posloupností)
Vyjádříme příslušný koeficient $[x^n]\frac{a(x)}{1-x} = \sum_{i=0}^{n} a_i$

Konvoluce

Obecněji, pro sumu $\sum_{i=0}^{n} a_i b_i$ určíme vytvořující funkce
$a(x) \leftrightarrow \big(a_i\big)_i^\infty$ a $c(x) \leftrightarrow \big(b_{n-i}\big)_i^\infty$
Konvolucí $a(x)c(x) \leftrightarrow \big(\sum_{j=0}^{i} a_j c_{n-j}\big)_i^\infty$
Jeden z koeficientů nyní odpovídá hledané sumě
$[x^n]a(x)c(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j c_{n-j} = \sum_{j=0}^{n} a_j b_j$