Úkol 4-1: Rozhodněte a dokažte jak se změní hranová a vrcholová souvislot grafu pokud kontrahujeme jednu z jeho hran. Tedy rozhodněte zda může zůstat stejná, klesnou, vzrůst, a zároveň jestli o 1 nebo o libovolnou hodnotu.
(Pro konzistenci uvažme pouze prosté grafy a kontrakce hran které nejsou součást trojúhelníku. Pokud ovšem opravdu chcete, můžete dokazovat i variantu se zachováváním násobných hran a smyček.)
Řešení:
Nechť G je k-souvislý a H je získaný z G kontrakcí hrany e.
U obou souvislostí si všimneme, že pokud uvážíme G jako libovolně velkou kliku s přidaným listem, jehož hranu kontrahujeme, potom obě souvislosti jsou 1 v G, ale libovolně vysoké v H.
Nejprve analyzujeme možné poklesy hranové souvilosti z pohledu cest. Uvažme libovolnou dvojici vrcholů u, v z G. Mezi u, v existuje k cest. Uvážíme všechny polohy e vůči těmto cestám. Pokud e má nejvýše jeden konec incidentní s nějakou konkrétní cestou P, kontrakcí e se P nezmění (ostatní hrany jsou zachovány). Pokud má e oba konce na nějaké cestě P, potom e buďto je hranou P nebo pouze spojuje dva vrcholy P. V prvním případě se kontrakcí hrany cesta typicky zkrátí, ale zůstává neporušena; speciálním případem je když e spojuje přímo u a v, v tomto případě všechny cesty zanikají, ale s nimi i pár u, v. Posledním případem je pokud e má oba konce incidentní s P, ale není hranou P; v tomto případě se z cesty stává sled, který lze ale zkrátit na novou cestu. V žádném z případů (kdy u, v jsou zachovány) tedy žádná konkrétní cesta P není zcela porušena, nedostáváme tedy nikdy u, v s menším počtem cest, hranová souvislost neklesá.
Poznamenejme, že zde předpokládáme, že žádná jiná hrana nezaniká kontrakcí e. Pokud bychom kontrahovali hrany, které jsou součástí trojúhelníků, museli bychom zachovávat multihrany. V tomto pohledu můžeme i argumentovat, že cesta je vlastně posloupnost hran splňující nějaké vlastnosti ("návaznost") s danými koncovými vrcholy. V tomto pohledu cestu ovlivní pouze narušení existence nějaké hrany nebo koncových vrcholů, což odpovídá případům výše.
Vrcholová souvislost se analyzuje podobně, tentokrát však nemůže být jeden konec hrany současně incidentní s vnitřními vrcholy více cest. Stejně jako v předchozím případě, žádná individuální cesta není zrušena (vnitřní vrcholová disjunktnost implikuje hranovou, platí tedy závěr z předchozího případu). Zbývá jediný případ, kdy je narušena vrcholová disjunktnost, tedy když dvě cesty začnou sdílet vnitřní vrchol. To je právě případ kdy každý konec e je incidentní s vnitřním vrcholem jiné cesty. V tomto případě počet cest klesá o 1, a protože e může být takto incidentní pouze se dvěma cestami, a jednu z cest můžeme vždy zachovat (dle závěru výše), souvislost klesá nějvýše o 1.
Nyní zkusme stejnou analýzu poklesu souvislostí z pohledu řezů. Označme $e = xy$ a w vrchol do kterého se x, y kontrahují.
Nejprve hranová souvislost. Mějme R minimální hranový řez H, a interpretujme ho jako elementární řez rozdělením množiny vrcholů na A, B. Stejné rozdělení vrcholů A', B' můžeme aplikovat na G (kde x, y dědí příslušnost w). Nahlédneme, že se jedná o řez protože $A', B' \neq \emptyset$. Ukážeme, že pro indukovaný hranový řez R' v G platí $|R'| \leq |R|$, z čehož plyne, že G obsahuje řez nejvýše

velikosti minimálního řezu H a tedy H je alespoň tak souvislý jako G. Každá z hrana f v R' spojuje vrchol z A' a vrchol z B'. Pokud $f \neq e$, potom f existuje i v H a spojuje vrchol z A s vrcholem z B a tedy $f \in R$. Pokud $f = e$ dostáváme spor, protože x a y leží na stejné straně elementárního řezu v G. Tedy každá hrana v R je i v R', a tvrzení je dokázáno.
Nyní vrcholová souvislost. Mějme R minimální vrcholový řez H. Vrcholy H můžeme rozdělit na tři množiny, A, B, R kde A indukuje komponentu $G-R$, a B jsou zbývající vrcholy (ty mohou a nemusí tvořit komponentu). Speciálně pouze vrcholy v R mají hrany do A i do B. Uvažme dekontrakci e, čímž získáme G, a jeho vrcholy kromě x, y máme rozdělené do množin A', B', R' jako výše. Pokud w je vrchol A, potom je incidentní pouze s vrcholy z A a R. Po dekontrakci máme x, y incidentní pouze s vrholy z A' a R', neboli R' je vrcholový řez G oddělující A' a B'. Analogicky pro B. Pokud w je vrchol z R, dostáváme x a y z nichž alespoň jeden je incidentní s A' a alespoň jeden s B'. Pokud jeden z x, y (búno x) není incidentní s oběma A' i B' (búno neincidentní s B'), můžeme ho přiřadit do množiny A', a y přiřadit do R'. Množina R' je vrcholový řez G, velikosti $|R|$. Pokud jsou oba x, y incidentní s A' i B', přiřadíme oba do R', R' je vrcholový řez v G a velikost R' je $|R|+1$. Dostáváme, že G má vždy řez velikosti maximálně $|R| + 1$ a tedy vrcholová souvislost H je maximálně o 1 menší než vrcholová souvislost G. Snadno najdeme příklad, kde vrcholu minimálního řezu indukují nějakou hranu, ukazující že souvislost skutečně může klesnout o 1.

Úkol 4-2: Dokažte, že ve vrcholově k-souvislém grafu pro každou k-tici vrcholů S existuje kružnice obsahující všechny vrcholy z S.
Vhodnou metodou důkazu je indukce dle počtu vrcholů v S.
Silná Mengerova věta:
Graf G je vrcholově (hranově) k-souvislý právě tehdy když pro každé $A, B \subseteq V(G)$ takové, že $|A|, |B| \geq k$ existuje k vrcholově (hranově) disjunktních cest spojujících disjunktní páry vrcholů z $A \times B$.
Řešení:
Využijeme silnou Mengerovu větu a budeme postupovat indukcí dle velikosti S. Jako základ indukce, pokud $|S| = 2$ a $k \geq 2$, ze standardní Mengerovy věty umíme najít kružnici obsahující oba vrcholy S. Poznamenejme, že pro $k = 1$ tvrzení neplatí pokud nepovažujeme samostatný vrchol za kružnici délky 0 - to se může zdát jako podvod, ale indukce bude fungovat i z tohoto základu, pokud ji formulujeme maličko opatrněji.
V indukčním kroku chceme dokázat, že pokud G je (alespoň) k-souvislý, $|S| = k$ a existuje kružnice C obsahující alespoň $k - 1$ vrcholů z S, potom existuje C' obsahující všechny vrcholy z C.
Označíme x vrchol z S, který není na C, pokud takový neexistuje, máme hotovo. Předpokládejme nejprve, že $|C| \geq k$. Z jedné z variant Mengerovy věty odvodíme (viz níže), že mezi C a x existuje k cest, které jsou vrcholově disjunktní vyjma x (tedy speciálně disjunktní i na C). Kružnici C si rozdělíme na úseky (cesty) mezi konci najitých Cx-cest. Těchto úseků je k, a tedy minimálně jeden úsek je vnitřně disjunktní s S. Tento úsek C nahradíme dvojicí cest do x končící na jeho okrajích. Získáváme hledané C'.
V případě, že $|C| = k - 1$, můžeme najít pouze $k - 1$ cest mezi C a x. Ale v tomto případě můžeme nahradit libovolný úsek, protože všechny úseky jsou pouze hrany (a tedy bez vnitřních vrcholů).
Jak tedy odvodíme existenci cest? Můžeme aplikovat silnou Mengerovu větu na C a $N(x)$ (sousedství x). Ze souvislosti $|N(x)| \geq k$ a tedy pokud $|C| \geq k$, dostáváme k vrcholově (zcela) disjunktních cest spojujících vrcholy z C s vrcholy v $N(x)$. Každou cestu můžeme protáhnout do x a získáme hledané cesty. Pokud $|C| = k - 1$, dostáváme právě $k - 1$ cest.
Alternativně můžeme postupovat přímo ze standardní Mengerovy věty. Přidáme nový vrchol s a napojíme ho hranami na všechny vrcholy C. Předpokládejme, že vzniklý graf je stále k-souvislý. Potom existuje k vnitřně vrcholově disjunktních sx-cest. Jejich zkrácením o s dostáváme hledané cesty mezi x a různými vrcholy C. Zbývá tedy argumentovat, že graf $G + s$ je stále k-souvislý. To argumentujeme tak, že (až na jedinou výjimku) každý vrcholový řez $G + s$ je vrcholovým řezem G (až na odebrání s z řezu), a tedy G nemůže být více souvislý než $G + s$. Výjimkou je řez, který na jedné straně obsahuje pouze s, ten přirozeně není řezem v G. Velikost tohoto řezu je $|C|$ a tedy pokud $|C| \geq k$, $G + s$ je minimálně k-souvislý, v opačném případě je $|C|$-souvislý - což nám v případě kdy $|C| = k - 1$ stačí.
Uvedeme si ještě postup bez Mengeroy věty, který vypadá "přímočařeji", ale uvidíme na něm co vše je třeba ošetřovat pokud si nepomůžeme zprávnou volbou varianty Mengerovy věty. Opět z indukčního předpokladu předpokládáme

existenci kružnici C obsahující $k-1$ vrcholů z $S-\{x\}$, a vrcholu x, který na C neleží. Vybereme libovolné dva vrcholy a a b z $S-\{x\}$ mezi kterými na C neleží žádný jiný. Mezi a a x existuje k vnitřně vrcholově disjunktních cest. Všechny cesty zkrátíme na cesty z a do prvního průniku cesty s C. Máme dva případy, buďto nalezené cesty protínají C v k různých vrcholech, nebo se alespoň dvě protínají s C právě v a. Poznamenejme, že z disjunktnosti může být více průniků skutečně pouze v a. V případě, že máme k různých průniků, uvážíme segmenty na které je kružnice rozdělena a jako v prvním důkazu najdeme segment, který uvnitř neobsahuje vrcholy z S, a můžeme tento segment nahradit dvěma cestami mezi konci segmentu a a.
Pokud máme dvojici cest protínající C pouze v a, opakujeme stejný postup pro vrchol b. Můžeme předpokládat, že tedy máme dvě cesty p_1, p_2 mezi x a a a dvě cesty q_1, q_2 mezi x a b, ty jsou disjunktní s C, v párech, ale nejsou nutně disjunktní napříč páry. Pokud třeba p_1 a q_1 jsou vnitřně disjunktní, dokončíme kružnici jako v předchozím případě. Předpokládejme tedy, že nejsou.
Cestu p_1 zkrátíme do prvního průniku w (ve směru od b) s nějakou z cest p_1, p_2 (búno p_2). Spojení zkráceného úseku q_1 a zbytku p_2 z w do x je cesta disjunktní od C i p_1. Společně s p_1 a zbytkem C bez segmentu mezi a a b tedy tvoří kružnici obsahující S.

Úkol 4-3: Ukažte, že v 3-regulárním grafu jsou hranová a vrcholová souvislost vždy stejné.
Řešení:
Z vlastností souvislostí víme, že hranové souvislost je vždy alespoň stejně vysoká jako vrcholová, stačí tedy dokázat, platnost opačné rovnosti. Protože obě souvislosti jsou nejvýše 3, a pokud je jedna 0, potom jsou obě 0, stačí ukázar rovnost v případech kdy jedna ze souvislostí je 1 a 2 (případ 3 je potom už implikován). Označme S minimální vrcholový řez v G. Chceme ukázat, že existuje hranový řez F nejvýše stejné velikosti. Označme A, B dvě komponenty $G - S$ (nemusí to být jediné dvě komponenty). Každý vrchol v z S má alespoň jednu hranu do A i do B - kdyby neměl, můžeme ho odstranit z S a S bude stále řez oddělující A od B (každá cesta mezi A B musí procházet S, ale nemůže procházet pouze v). Naopak tedy každý vrchol má nejvýše jednu hranu vedoucí do A nebo do B.
Nyní můžeme využít toho, že stačí vyřešit případy kdy $|S| \leq 2$. Pokud $S = \{v\}$, potom v je incidentní s mostem a hranová souvislost je tedy 1. Pokud $S = \{v, w\}$, chceme analogicky od každého vrcholu odebrat hranu, která ho odřízne od A nebo B. Pokud v a w nejsou spojeny hranou, můžeme toto provést nezávisle jako u jednoho vrcholu. Pokud ale jsou spojené hranou (a tedy mají oba jednu hranu do A i do B), musíme do F vzít buď obě hrany do A nebo obě hrany do B.
Pokud bychom v argumentu uvažovali všechny komponenty $G-S$ - potenciálně tři, potom musíme analogicky systematicky odřezávat jenom jednu komponentu u všech vrcholů řezu, protože každý bude spojený s každou komponentou jedinou hranou. Pokud v případě kde $|S|$ je 2 nebo 3 vezmeme od každéh vrcholu řezu hranu do jiné komponenty, graf zůstává souvislý.
Jiný důkaz můžeme vést tak, že ukážeme, že hranově disjunktní cesty v 3-regulárním grafu jsou vždy i vnitřně vrcholově disjunktní. Pro spor stačí uvážit vrchol který náleží dvojici hranově disjunktních cest, a je pro obě cest vnitřní. Tento vrchol musí být incidentní se čtyřmi růzými hranami, což se spor s 3-regularitou. Tím dostáváme, že hranová souvislost implikuje alespoň stejně vysokou hranovou souvislost, a společně s triviálním opačným vztahem dostáváme rovnost.