**Úkol 2-1:** Určete koeficienty u daných mocnin, dopočítejte do jednoduchého výrazu (zlomek, výraz s jednou odmocninou,...):

$$[x^5] : (2x-1)^{-2}$$
$$[x^5] : (1+x)^{-1/3}$$
$$[x^6] : x\frac{x^2-1}{(1-x)^{\sqrt{3}}}$$

**řešení**
První výpočet přímo dle zobecněné binomické věty, nebo zápornou binomickou větou.

$$[x^5](2x-1)^{-2} = [x^5](1-2x)^{-2} = \binom{-2}{5}-2^5 = \binom{6}{1}2^5 = 192$$

V druhém výpočtu budeme postupovat podle definice zobecněného binomického čísla, rozepíšeme všech pět členů a zjednodušíme produkt a složený zlomek.

$$[x^5](1+x)^{-1/3} = \binom{-1/3}{5} = \frac{\frac{-1}{3}\frac{-4}{3}\frac{-7}{3}\frac{-10}{3}\frac{-13}{3}}{5!} = -\frac{4*7*10*13}{3^5 5!} = \frac{7*13}{3^6} = 191/729$$

Poznamenejme, že záporná binomická věta zda není vhodný nástroj - umí zjednodušít pouze celočíselná kombinační čísla. Dostali bychom stále neceločíselné kombinační číslo, které musíme zpracovat dle definice, ale navíc s neceločíselným spodním členem, což neumíme z definice zpracovat.
Ve třetím výpočtu opět záporná binomická věta nemá sílu výpočet zjednodušit (naopak). Poznamenejme též, že ačkoliv $\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3}$, tak $(1+x)^{\sqrt{3}} \neq (1+x)^{1/3}$ už z toho důvodu, že $\sqrt{3} \neq 1/3$.
Výraz zjednodušíme odstraněním zbytečného $x$, a rozložíma ne dva podvýpočty. Na každý z nich aplikujeme přímočaře zobecněnou binomickou větu.

$$[x^6]x\frac{x^2-1}{(1-x)^{\sqrt{3}}} = [x^4](1-x)^{-\sqrt{3}} - [x^6](1-x)^{-\sqrt{3}} = \binom{\sqrt{3}}{4} - \binom{\sqrt{3}}{6}$$

Kombinační čísla rozepíšeme z definice zobecněních binomických čísel. Dostaneme produkt čtyř a šesti prvků, převážně binomů. Výpočet můžeme zkusit nakrmit třeba do Wolframu, nebo ho zkusíme zchroustat nějak pokud možno elegantně. Můžeme si všimnout, že produkt čtyř členů je stejný v obou výrazech, můžeme ho tedy spočítat pouze jednou. Některé operace lze navíc dělat ve vhodném pořadí. Spočítáme $\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}-3) = -3(\sqrt{3}-1)^2(\sqrt{3}-2) = -3(4-2\sqrt{3})(\sqrt{3}-2) = 6(\sqrt{3}-2)^2 = 6(7-4\sqrt{3}) = 6\alpha$
V druhém členu zbývají dva členy $(\sqrt{3}-4)(\sqrt{3}-5) = (23-9\sqrt{3})$
Pokračujeme v úpravě hlavního výpočtu

$$= \frac{6\alpha}{4!} - \frac{6\alpha(23-9\sqrt{3})}{6!} = \alpha(\frac{1}{4} - \frac{(23-9\sqrt{3})}{5!})$$

.

**Úkol 2-2:** Uvažme hod dvanácti různými 12-stěnnými kostkami s hodnotami 1 až 12. Chceme vyjádřit počet způsobů, kterými může padnou v součtu 45. Výsledek chceme jako jednoduchou kombinaci pár obyčejných (pozitivních, celočíselných) kombinačních čísel.

**řešení**

Postupujeme dle modelu úloh na rozklady na součty. Ptáme se kolika způsoby lze čísli 45 rozložit na dvanáct součtů od 1 do 12. To spočítáme konvolucí charakteristických posloupností jednotlivých sčítanců představujících jednotlivé kostky.

Jeden hod kostkou můžeme modelovat jako "tabulku" možností, reprezentovanou charakteristickou posloupností obsahující 1 na indexech 1 až 12 (tedy tyto hodnoty jsou možné) a 0 na indexech 0 a od 13 dále. Takovou posloupnost můžeme reprezentovat vytvořující funkcí $x\frac{1-x^12}{1-x}$.

Hledáme tedy hodnotu $[x^45]\left(x\frac{1-x^12}{1-x}\right) = [x^33]\frac{(1-x^12)^{12}}{(1-x)^{12}} = [x^33](1-x^12)^{12}(1-x)^{-12}$

První binom rozepíšeme pomocí (klasické) binomické věty: $(1-x^12)^{12} = \sum_{i=0}^{12}\binom{12}{i}(-1)^i x^{12i} = \binom{12}{0}x^0 - \binom{12}{1}x^12 + \binom{12}{2}x^24 - \binom{12}{3}x^36 + \ldots$. Další členy rozepisovat nemusíme, hledáme totiž koeficient u exponentu $x^33$, a exponenty z prvního binomu se budou kombinovat pouze s koeficienty z druhého binomu, které jsou všechny nezáporné. Stačí nám tedy první tři členy.

Druhý binom rozepíšeme pomocí záporné binomické věty jako $(1-x)^{-12} = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{-12}{i}(-x)^i = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{11+i}{11}(-x)^i$.

Nyní můžeme všechny perspektivní členy z prvního binomu zkombinovat s příslušnými členy z druhého binomu, jejichž exponenty se sčítají na 33. Dostáváme výraz

$$\binom{12}{0}\binom{11+33}{11} - \binom{12}{1}\binom{11+21}{11} + \binom{12}{2}\binom{11+9}{11}$$

Můžeme dopočítat, ale jedná se o masivní číslo.

**Úkol 2-3:** Spočítejte sumu prvních $n$ lichých celých čísel pomocí vytvořujících funkcí.
**řešení**
Hledáme hodnotu sumy $\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)$
Řada $(2n-1)_n$ má vytvořující funkci $f(x) = 2\frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}$
Řada částečných součtů má tedy vytvořující funkci $s(x) = \frac{f(x)}{1-x} = 2\frac{x}{(1-x)^3} + \frac{1}{1-x}^2$
Hledáme koeficient u $x^{n-1}$:

$$[x^{n-1}]s(x) = 2[x^{n-2}](1-x)^{-3} + [x^{n-1}](1-x)^{-2} = 2\binom{3-1+n-2}{3-1} + \binom{2-1+n-1}{2-1} = 2\binom{n}{2} + \binom{n}{1} = n^2$$