**Úkol 1-1:** Najděte explicitní vzorec pro zadanou posloupnost aplikací vytvořujících funkcí
$a_0 = 1$ $\qquad a_n = 2a_{n-1} + 3$
**Řešení**
První krok řešení je najít vytvořující funkci $f(x)$ odpovídající zadané posloupnosti. Můžeme postupovat třeba pomocí tabulky kde první řádek představuje zadanou posloupnost a další řádky představují části, které se sčítají na zadanou posloupnost - první dva získané z rekurektního předpisu, třetí upravuje výchozí členy dle zadání.

| $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | ... | $f(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| - | $2a_0$ | $2a_1$ | $2a_2$ | ... | $2xf(x)$ |
| 3 | 3 | 3 | 3 | ... | $\frac{3}{1-x}$ |
| $-2$ | 0 | 0 | 0 | ... | $-2$ |

Dostáváme vztah $f(x) = 2xf(x) + \frac{3}{1-x} - 2$, který upravíme na

$$f(x) = \frac{3 - 2(1-x)}{(1-x)(1-2x)} = \frac{1-2x)}{(1-x)(1-2x)}$$

.
Stejně tak jsme mohli posloupnost trojek posunou o jeden krok doleva, a na třetím řádku porstě dosadit $a_0$. Dostali bychom ekvivalentní vztah $f(x) = 2xf(x) + \frac{3x}{1-x} + 1$.
Jmenovatel v.f. je již rozložený, můžeme tedy parcializovat. Podle toho jakou používáme metodu může být potřeba si převést binom $(1-2x)$ na základní tvar $(x - 1/2)$ vytknutím $-2$ a stejně tak binom $(1-x)$ na $(x-1)$. Zvolme tedy robustní metodu. Víme, že výsledný tvar parcializace (až na nějaké algebraické úpravy) splňuje následující vztah:

$$\frac{1+2x)}{(1-x)(1-2x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-2x}$$

Obě strany vynásobíme jmenovatelem levého výrazu a dostáváme vztah

$$1 + 2x = A(1-2x) + B(1-x)$$

Vztah rozložíme pro jednotlivé mocniny $x$ a máme vztahy $1 = A + B$ a $2 = -2A - B$. Soustavu vyřešíme a dostáváme $A = -3$ a $B = 4$. A rozložená v.f. je tedy

$$f(x) = \frac{-3}{1-x} + \frac{4}{1-2x}$$

.
Levý z dvou členů odpovídá jednotkové poslupnosti přenásobené $-3$, a pravý odpovídá posloupnosti mocnin 2 přenásobené 4. Explicitní předpis tedy je

$$a_n = -3 * 1 + 4 * 2^n = 2^{n+2} - 3$$

**Úkol 1-2:** Najděte explicitní vzorec pro zadanou posloupnost aplikací vytvořujících funkcí

$a_0 = 1$ $\qquad$ $a_1 = 2$ $\qquad$ $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$

**Řešení**

První krokem je opět nalezení v.f. představující zadanou posloupnost. Zkusíme jinou metodu. Hledanou v.f. si zapíšeme jako

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = 1 + 2x + \sum_{i=2}^{\infty} a_i x^i$$

Prvy zleva si převedeme doprava a do sumy napravo nyní mžeme dosadíme rekurentní zápis (nyní obsahuje pouze prvky posloupnosti, které lze rekurzivně definovat)

$$f(x)-1-2x = \sum_{i=2}^{\infty}(2a_{i-1}-a_{i-2})x^i = \sum_{i=2}^{\infty} 2a_{i-1}x^i + \sum_{i=2}^{\infty} -a_{i-2}x^i = 2x\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i - 2x - x^2 \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

Polynomům napravo odpovídají funkce $2xf(x) - 2x$ a $-x^2 f(x)$ resp.
Máme tedy vztah $f(x) - 1 - 2x = 2xf(x) - 2x - x^2 f(x)$ a po úpravě dostáváme $f(x) = \frac{-1}{-x^2+2x-1} = \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Tento výraz není třeba parcializovat, už je v základním tvaru. Buďto známe přespis posloupnosti odpovídající této v.f. nebo můžeme rovnou použít obecnou binomickou větu. Ta říká, že $(1-x)^{-2} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-2}{i} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+1}{1} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) x^i$. Kde jsme mohli použít zápornou binomickou větu, nebo upravit negativní kombinační číslo z definice.
Explicitní předpis členů posloupnosti tedy je: $a_n = n + 1$.

**Úkol 1-3:** Najděte explicitní vzorec pro zadanou posloupnost aplikací vytvořujících funkcí
$a_0 = 2$ $a_1 = 3$ $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$
**Řešení**
Tentokrát budeme postupovat bez dopočítávání každého kroku. Jako v první úloze si načrtneme tabulku rozkladu v.f. zadané posloupnosti.

| $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $\ldots$ | $f(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| - | $3a_0$ | $3a_1$ | $3a_2$ | $\ldots$ | $3xf(x)$ |
| - | - | $-2a_0$ | $-2a_1$ | $\ldots$ | $-2x^2f(x)$ |

V tabulce chybí ještě nějaký polunom $p(x)$, který by zajistil správné nastavení výchozích členů, momentálně nám stačí, že platí vztah $f(x) = 3xf(x) - 2x^2f(x) + p(x)$ a tedy $f(x) = \frac{-p(x)}{2x^2-3x+1}$. Polynom ve jmenovateli má kořeny 1 a 1/2. Máme tedy následující vztah společně s náčrtkem parcializace:

$$f(x) = \frac{-p(x)}{2(x-1)(x-1/2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-1/2}$$

V prvním zlomku přenásobíme čitatele i jmenovatele $-1$ a v druhém $-2$, dostáváme, že $f(x) = \frac{A'}{1-x} + \frac{B'}{1-2x}$ kde $A'$ a $B'$ jsou nějaké nové konstanty (jejich vztah k $A, B$ triviálně známe, ale není podstatný.
Z v.f. nyní vidíme, že explicitní předpis členů posloupnosti je $a_n = A' + B'2^n$. Dosadíme za $n$ hodnoty 0,1, a pro kontrolu i 2. Dostáváme rovnosti $a_0 = 2 = A' + B'$, $a_1 = 3 = A' + 2B'$ a $a_2 = 5 = A' + 4B'$. Vyřešíme soustavu prvních dvou vztahů a z třetího ověříme, že skutečně $A' = 1$ a $B' = 1$.
Explicitní předpis tedy je $a_n = 1 + 2^n$.