

Příklad 1: Najděte explicitní vzorce pro následující posloupnosti:

- $a_0 = -1; a_1 = 1; a_2 = 1; \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$
- $a_0 = a_1 = 2; \quad a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$
- $a_0 = a_1 = 2; \quad a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$

Příklad 2: Najděte příslušné koeficienty u následujících funkcí

- $[x^4]$ funkce $\sqrt{1+x}$
- $[x^{15}]$ funkce $(1-2x)^{-2}$
- $[x^{50}]$ funkce $(x^{10} + \dots + x^{20})(x^{10} + x^{11} + x^{12} + \dots)^2$

Hint: Třetí funkci nejprve zjednodušte

Příklad 3: Chceme koupit 50 kusů limonád. Na výběr máme 3 druhy, chceme od každého druhu alespoň 10 kusů. Obchod má pouze 20 kusů červených, 30 kusů zelených a 40 kusů žlutých. Kolika způsoby můžeme nákup provést?

Nalezněte řešení jako koeficient polynomu nějaké vytvořující funkce.

Hint: úloha by už měla být vyřešena

Příklad 4: Sečtěte řady (pomocí vytvořujících funkcí)

$$\sum_{k=0}^n k \quad \sum_{k=0}^n 2^k$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \quad \sum_{k=0}^n k 2^k$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{2^{n-k}}{k}$$

Úkol 2-1: Určete koeficienty u daných mocnin, dopočítejte do jednoduchého výrazu (zlomek, výraz s jednou odmocninou,...):

$$[x^5] : (2x - 1)^{-2}$$

$$[x^5] : (1 + x)^{-1/3}$$

$$[x^6] : x \frac{x^2 - 1}{(1 - x)\sqrt{3}}$$

Úkol 2-2: Uvažme hod dvanácti různými 12-stěnnými kostkami s hodnotami 1 až 12. Chceme vyjádřit počet způsobů, kterými může padnou v součtu 45. Výsledek chceme jako jednoduchou kombinaci pár obyčejných (pozitivních, celočíselných) kombinačních čísel.

Úkol 2-3: Spočítejte sumu prvních n lichých celých čísel pomocí vytvořujících funkcí.