Úkol 2-1: Na vstupu máme mřížku $n \times n$, ve které některá pole jsou zablokovaná. Chceme na mřížku rozmístit co nejvíce kostek domina (obdélníky 1×2). Kostky domina můžeme otáčet o 90 stupňu, obě poloviny každé kostky musí být na políčku mřížky, nesmí se překrývat s jinou kostkou ani zasahovat do zablokovaných polí.
Úlohu je možné vyřešit pomocí toků. Navrhněte postup, kterým z mřížky na vstupu vybudujeme zadání úlohy hledání maximálního toku jehož řešení je možné zpět přeložit na řešení úlohy o dominu.

- Popište, jak vytvořit zadání tokové úlohy ze vstupu (není třeba popisovat přímo algoritmus provádějící konverzi) a jak z řešení tokové úlohy zkonstruovat řešení pro domino.
- Ukažte ekvivalenci úlohy s dominem a úlohy na maximální tok (korektnost transformace). Tzn. je potřeba ukázat dvě tvrzení, že řešení zkonstruované tokové úlohy vydá "stejně dobré" řešení úlohy s dominem, a naopak řešení úlohy s dominem dá "stejně dobrý" tok.
- Ukažte, že z předchozího už plyne, že optimální řešení jedné úlohy je optimálním řešením druhé úlohy. (A tedy máme korektní alg. na řešení domina)

Protože nekonstruujeme explicitní algoritmus, protentokrát nás nezajímá složitost. Avšak, konstrukce by měla být rozumná (tedy asymptoticky zhruba stejné velikosti jako původní úloha, nechceme "vrchol pro každé rozmístění kostek" apod.).

Řešení:

Možné pozice kostek budeme reprezentovat jako hrany v tokové síti. Síť navrhneme tak, že dvě hrany představující kolidující pozice nemohou mít zároveň nenulový (celočíselný) průtok. V síti nalezeneme maximální (celočíselný) tok, a pozice s nenulovým průtokem prohlásíme za optimální rozmístění kostek domina.

Pozorování:

Představíme-li si mřížku obarvenou jako šachovnici, každá dominová kostka zabírá právě jedno černé a jedno bílé pole. Ekvivalentně řečeno, graf čtvercové mřížky je bipartitní (resp. jejího duálu, který má sle stejnou strukturu).

Konstrukce:

Pro každé pole vytvoříme vrchol a spojíme hranami vrcholy polí, která spolu sousedí (hranou). Ekvivalentně řečeno, sestavíme incidenční graf polí. Pro chybějící pole vrcholy netvoříme. Z pozorování výše dostáváme bipartitní graf s 'černou' a 'bílou' partitou. Všechny hrany zorientujeme z černé partity do bílé. Přidáme zdroj a stok, ze zdroje napojíme hrany do všech vrcholů černé partity, a všechny vrcholy bílé partity napojíme do zdroje. Kapacity všech hran jsou 1.

Převod z toku na domino a korektnost:

Po nalezení celočíselného toku (ne nutně maximálního) v zkonstruované síti získáme řešení úlohy domina tak, že dominové kostky položíme na všechny pozice reprezentované hranami mezi černou a bílou partitou s tokem 1.
Ukážeme, že získané řešení domina je korektní (ne nutně maximální). Žádná z hran v tokové síti (mezi černou a bílou partitou) neodpovídá pozici zakrývající chybějící pole, nebo přečnívající přes okraj mřížky, získané řešení tedy nemůže porušit příslušné podmínky.
Zároveň průtok každým černým vrcholem je nejvýše 1. Každý černý vrchol má totiž jedinou vstupní hranu, a to s kapacitou 1 a incidentní se zdrojem. V celočíselném toku tedy bude každý černý vrchol incidentní s jedinou (výstupní) hranou vedoucí do bílé partity s nenulovým tokem. Analogicky pro bílé vrcholy a vstupní hrany. Získaný předpis pozic dominových kostek tedy nemůže pokrývat žádné pole více než jednou kostkou.
Tím jsou splněny podmínky na umístění dominových kostek.
Všimneme si navíc, že velikost toku v síti je rovna počtu kostek v získaném řešení. To můžeme formálně nahlédnout třeba tak, že všechny hrany z černé partity do bílé tvoří řez. Průtok přes tento řez (mínus tok v opačném směru, který je nulový kvůli neexistenci hran v opačném směru) je tedy roven velikosti toku. Z celočíselnosti toku a jedničkových kapacit je velikost toku rovna počtu hran řezu s nenulovým tokem.

Převod z domina na tok:

Obdobně můžeme převést každé řešení domina na příslušný celočíselný tok. Každou umístěnou dominovou kostku (resp. její pozici) interpretujeme jako hranu v tokové síti. Každá taková hrana má unikátní rozšíření na cestu ze zdroje do stoku. Tok po této cestě zvýšíme o 1.
Uvážením kostek jendu po druhé vidíme, že výsledký tok bude mít velikost rovnou počtu dominových kostek. Zvyšováním toku po cestách určitě nemůžeme porušit Kirchhoffův zákon. Stačí tedy ověřit splnění kapacit. Protože tok zvyšujeme vždy o 1, kapacity je možné porušit pouze tehdy, pokud by dvě cesty sdílely hranu. Z disjunktnosti dominových kostek ale vidíme, že cesty dokonce nesdílejí žádné černé ani bílé vrcholy a jsou tedy dokonce úplně vnitřně disjuktní.

Maximalita řešení:

Výše jsme nahlédli, že libovolný velidní tok lze přeložit na validní rozmístění domina stejné velikosti, a i naopak. Ukážeme nyní sporem, že maximální tok tedy nutně odpovídá optimálnímu řešení domina.
Uvažme maximální tok f, a z něj odvozené řešení domina k (stejné velikosti). Pro spor, nechť řešení domina není optimální. Potom existuje řešení k^+ s více kostkami, a jemu odpovídající validní tok f^+ stejné velikosti. Nyní ale dostáváme, že $|f^+| = |k^+| > |k| = |f|$, což je spor s maximalitou f.