Domácí úkoly - 9. série

Úkol 9-1: Zamíchejme náhodně balíček (52) karet. Jaká je pravděpodobnost, že srdcové eso je v balíčku před pikovou dámou? Jaká je pravděpodobnost, že je přímo před ní (tedy nejsou mezi nimi žádné karty)? [3 body]

Řešení:

Odpověď na první otázku je 1/2.
Tvrzení dokážeme nejprve párováním pozitivních a negativních elementárních jevů. Pro každé zamíchání karet, kde jsou zajímavé karty ve správném pořadí existuje unikátní zamíchání, kde nejsou ve správném pořadí, které získáme prohozením našich dvou zajímavých karet. Prohozením zřejmě dostáváme bijekci.
Alternativně můžeme situaci chápat tak, že nejprve vybereme dvě pozice kde se budou nacházet zajímavé karty. Pro každou dvojici pozic pak máme dvě možnosti jak zajímavé karty umístit, jednu dobrou a jednu špatnou. Rozmístění ostatních karet je nezávislé.
V druhé otázce chceme spočítat počet způsobů zamíchání, kde dvě karty jsou za sebou. Představíme si, že zajímavé karty tvoří jeden nerozdělitelný blok (dvojitou kartu). Počet dobrých zamíchání pak je počet zamíchání 51 prvků. Pravděpodobnost dobrého zamíchání je tedy $51!/52! = 1/52$. Alternativně můžeme uvížit všechny možné pozice jedné karty, ty jsou rovnoměrně náhodné. Pro každou možnost pak máme pravděpodobnost 1/51, že druhá karta skončí na správné pozici (vyjma jednoho případu, kdy první karta skončila na jednom okraji). Dostaneme tedy odpověď $51 * \frac{1}{52} * \frac{1}{51} = 1/52$.

Úkol 9-2: Na objednávku 3 pytlů černého a 3 pytlů zeleného čaje přišly tři krabice, v každé dva pytle. Víme, že dvě krabice obsahují pytle stejného typu, pouze jedna je namíchaná. Pokud jsme otevřeli jednu (náhodnou) z krabic, vyndali jeden (náhodně) z pytlů a zjistili, že se jedná o zelený čaj, s jakou pravděpodobností je druhý pytel také zelený čaj? [3 body] "Hint:" pozor na to, že pravděpodobnosti jsou změněny podmínkou pozorování pytle

Řešení:

V této úloze je třeba si uvědomit, že sice vybíráme jednu z krabic rovnoměrně náhodně, ale zahrnutím podmínky na nalezený čaj se uniformita rozbila. Úlohu tedy nelze přímo řešit prostřednitvím pravděpodobností, že se nacházíme v jednotlivých krabicích. Problém je především v tom, že jsme pozorovali obsah pytle, ale každá z krabic má jiný vztah k pytlům.
Všimněme si ale, že jsme také rovnoměrně náhodně vybrali jeden ze 6 pytlů. Pozorování obsahu pytle nám prozradilo, že jsme skončili v jednom ze tří konkrétních pytlů. Náš pravděpodobnostní prostor se tedy zůžil na tři elementární jevy, s uniformní pravděpodobností. Nyní si stačí všimnout, že dva z možných pytlů se nacházejí spolu v jedné krabici. Odpověď je tedy 2/3.
Zapsáno formálně:
Označme si čaje jako Z (zelený) a N (nezelený/černý). Označmě si krabice jako A (dva Z), B (Z a N) a C (dva N).

Pravděpodobnost, že i druhý čaj je zelený je vlastně pravděpodobnost, že se nacházíme v krabici A za podmínky, že jsme otevřeli pytel se zeleným čajem.

$$P[A|Z] = \frac{P[A\&Z]}{P[Z]} = \frac{P[A]}{P[Z]} = \frac{P[A]}{P[A\&Z] + P[B\&Z] + P[C\&Z]} = \frac{P[A]}{P[A] + P[B]/2} = \frac{1/3}{1/2} = 2/3$$

Kde první rovnost je definice podmíněné pravděpodobnosti. Druhá rovnost plyne z faktu, že v A jsou pouze Z. Třetí rovnost je tu pouze pro hyperkorektnost, tedy můžeme $P[Z]$ vyjádřit vysčítáním přes volbu krabice (pokud postupujeme přesně dle postupu popsaného v zadání). Stejně bychom mohli rovnou říct, že $P[Z] = 1/2$, protože výběr pytle je zřejmě uniformní. Čtvrtá rovnost platí ze stejných důvodů jako druhá. Pátá rovnost plyne z faktu, že každá krabice je vybrána s uniformní pstí $1/3$.

Úkol 9-3: Máme n bodů na kružnici. Náhodně vybereme dvě disjunktní trojice a obě spojíme do trojúhelníků. S jakou pravděpodobností se trojúhelníky protínají? [6 bodů] Hint: výsledek nezávisí na n

Řešení:

Nejprve si uvědomíme, že nezáleží na konkrétních polohách šesti speciálních bodů, pouze na jejich vzájemných polohách. Můžeme tedy ekvivalentně vybrat náhodnout šestici bodů, a následně tuto šestici rozdělit na dvě trojice. Pro každou šestici máme stejnou pravděpodobnost průniku výsledných trojúhelníků, stačí tedy úlohu vyřešit pro šestici bodů.
Z šestice vybereme dvě trojice jako výber jedné trojice a doplňku, $\binom{6}{3}$ způsoby. Poznamenejme, že takto dostaneme každé rozdělení dvakrát (podle toho, která trojice je vybraná a která doplňková), protože nás ale zajímá pravděpodobnost (poměr počtů), problém se vyruší. Snadno nahlédneme, že trojúhleníky se protínají právě když jejich vrcholy alternují na kružnici. Aby se tedy neprotínaly, musí být vybraná trojice oddělená od doplňku, neboli musí tvořit souvislý úsek. Máme 6 možností, jak takovou trojici vybrat. Počet protínajících se výběrů je tedy $\binom{6}{3} - 6 = 14$. Pravděpodobnost, že vybereme protinající se výběr je $\frac{\binom{6}{3}-6}{\binom{6}{3}} = \frac{14}{20} = 7/10$.

Úkol 9-4: Mějme čísla $1, 2, \ldots, n$ a vezměme náhodnou permutaci na nich.

- S jakou pravděpodobností je vybraná permutace jediný cyklus? [3 body]
- Ukažte, že prvky 1 a 2 leží na stejném cyklu s pravděpodobností $1/2$. [5 bodů]

Řešení:

V první úloze stačí spočítat počet permutací tvořících jeden cyklus. Podobné problémy jsme řešili na cvičení, takových permutací je $(n-1)!$. Pro úplnost uveďme argument, že každý cyklus lze unikátně popsat jako posloupnost n prvků začínající prvkem 1, záleží tedy pouze na pořadí $n-1$ prvků.

Odpověď je $\frac{(n-1)!}{n!} = 1/n$.
V druhé úloze využijeme toho, že víme, že pravděpodobnost je 1/2. Stačí tedy spárovat elementární jevy (permutace). Uvažme permutaci, kde 1 a 2 leží na různých cyklech. Tuto permutaci spárujeme s permutací získanou následovně, poslední prvek cyklu z 1 (zobrazuje se na 1) zobrazíme na prvek 2, a poslední prvek cyklu s 2 zobrazíme na 1. Tím jsme oba cykly propojili do jednoho. Pro permutace, kde 1 a 2 jsou na stejném cyklu postupujeme opačně, prvek zobrazující se na 2 zobrazíme na 1, a naopak. Není obtížné nahlédnout, že se jedná o bijekci (resp. že se jedná o prosté zobrazení protože permutace mimo cykly je fixní, a pořadí prvků následujících po 1 a 2 taktéž).
Pokud použijeme sofistikovanější terminologii permutací, obě operace jsou složení permutace s inverzí $(1, 2)$. Složení s inverzí je idempotentní (dvojitá aplikace je identita), a dává tedy bijekci.