Domácí úkoly - 8. série

Úkol 8-1: Dokažte, že souvislý k-regulární bipartitní graf nemůže obsahovat most. (Pozor na výjimky) [4 body]

Řešení:

Pro spor mějme k-refulání graf G s mostem. Odeberme most, a uvažme jednu ze vzniklých komponent, označme ji H. H je bipartitní graf (podgraf G) s partitami A, B. Nechť most byl incidentní s partitou B. Z k-regularity máme v H právě $k|A|$ hran (počítáme konce hran incidentní s A), a zároveň $k|B| - 1$ hran (zde jeden konec chybí). Aby druhý výraz byl dělitelný k, musí platit $k = 1$, nebo $k = 0$. Pro $k = 0$ se dostaneme do sporu s existencí hrany, kterou jsme odebrali. Jediný graf odpovídající zadání je tedy K_2 pro $k = 1$.

Úkol 8-2: Ukažte, že v každém souvislém grafu G na alespoň 3 vrcholech existují dva vrcholy u, v t.ž. odebrání obou najednou ($G \backslash \{u, v\}$) se souvislosti grafu zachovává. [4 bodů]

Řešení:

Pokud uvážíme případ kdy G je strom, tvrzení je reformulací stromové indukce. Pro obecný graf G uvažme jeho libovolnou kostru T. Aplikací stromové indukce na T (s alespoň 3 vrcholy) dostaneme dva listy T jejichž odebráním získáme strom T'. Pokud odebereme stejné dva vrcholy z G, získáme $G' \supseteq T'$. Protože T' je souvislý (je strom) podgraf G' a obsahuje všechny vrcholy G' (neboli je kostrou), je i G' souvislý.

Úkol 8-3: Najděte (prostý) graf na alespoň 6 vrcholech isomorfní svému rovinnému duálu. [3 body] Za velký graf (třeba 15 vrcholů) můžete získat i bonus (pokud bude unikátní).

Řešení:

Pro příklad si můžeme vzpomenout na samo-duální struktury z 9. cvičení. Třeba čtvercová mřížka je prákladem dokonce nekonečný příklad.
Z konečných příkladů stojí za zmínku n-boké jehlany (ekvivalentně reprezentované jako kružnice s apexem), nebo jejich k-vrstvé varianty (několik n-bokých hranolů na sobě s n-bokým jehlanem na vrchu, ekvivalentně reprezentované jako několik do sebe vnořených kružnic, kde mezikruží jsou vyplněny 4-stěnami a nejvnitřnější kružnice má středový vrchol fungující jako její apex).

Úkol 8-4: Charakterizujte rovinné grafy jejichž duály nemají smyčky ani násobné hrany. Protože duál je definovaný vůči konkrétnímu (rovinnému) nakreslení, formálně chceme charakterizovat grafy jejichž žádné nakreslení nemá duál se zakázanými vlastnostmi (ale ve skutečnosti na volbě nakreslení nezáleží). [3 body]

Řešení:

Předpokládejme, že máme duál H grafu G obsahující nějakou zakázanou strukturu a uvažme jaká struktura v G je způsobila. Poznamenejme, že hrany H a

hrany G si bijektivně navzájem odpovídají. Předpokládejme, že G je souvislý, jinak tvrzení platí pro každou z jeho komponent.
Uvažme H se smyčkou e. Smyčka spojuje vrchol se sebou, tedy v G musí odpovídat hraně f jejíž obě strany jsou stejná stěna. Pokud uvážíme uzavřený sled, který obchází tuto stěnu, bude přecházet přes f dvakrát. Odebráním f z G se tedy hranice této stěny rozpadne na dvě části, což je možné pouze pro nesouvislý graf. Hrana f je tedy nutně most. Naopak lze snadno nahlédnout, že každý most splňuje vlastnost, že obě jeho strtany jsou stejná stěna. Kdyby byl most incidentní se dvěma stěnami, obejitím jedné z nich najdeme cestu z jedné strany mostu na druhou bez použití mostu. Poznamenejme, že toto kritérium je nezávislé na nakreslení G.
Uvažme H s násobnou hranou e_1, e_2. Jako v předchozím případě nahlédneme, že v G máme odpovídající hrany f_1, f_2 oddělující stejné dvojice stěn. Podobným argumentem jako v předchozí úloze by odebrání obou hran z G vytvořilo stěnu jejíž hranice je tvořena dvěma částmi, lze to nahlédnout třeba tak, že odebráním f_1 se obě stěny spojí do jedné, a tedy obě strany f_2 jsou nyní stejná stěna, neboli f_2 je most. Máme tedy nutně dvojici hran, jejíž odebrání z G poruší souvislost (této vlastnosti se říká hranová 2-souvislost), což je zobecnění kritéria pro smyčky. Opačnou implikaci lze opět nahlédnou tak, že pokud dvě hrany (jejichž odebrání poruší souvislost) sousedí s více než 2 stěnami, obejitímí třech z nich získáme alespoň jednu cestu mezi údajnými komponentami bez použití libovolné z hran. Opět poznamenejme, že toto kritérium je nezávislé na nakreslení G.
Dohromady tedy platí, že (prostý, souvislý) graf má duál bez smyček a násobných hran právě tehdy když odebrání jedné nebo dvou hran neporuší jeho souvislost. Pro nesouvislé graf platí, že odebrání nesmí počet komponent vzrůst.

Úkol 8-5: Rovinné grafy mají průměrný stupeň menší než 6, a tedy mají alespoň jeden vrchol stupně nejvýše 5. Dokažte, že v každém rovinném grafu na n vrcholech je alespoň $n/2$ vrcholů stupně nejvýše 8. [7 bodů]

Řešení:

Sporem nechť G' je protipříklad na n vrcholech (tedy je rovinný má více než $n/2$ vrcholů stupňů alespoň 9). Doplňme G na rovinnou triangulaci G, stupně se tím pouze zvětší. (Ekvivalentně můžeme definovat G jako maximální protipříklad na n vrcholech). Poznamenejme, že můžeme předpokládat $n \geq 10$ protože předpokládáme existenci vrcholu stupně 9. Graf tedy lze doplnit na triangulaci (třeba graf na 2 vrcholech doplnit nelze).
Nejprve ukážeme, že rovinná triangulace G neobsahuje vrcholy stupňů 1 a 2.
Vrchol v stupně 1 se sousedem w by se nacházel ve stěně jejíž obvod obsahuje vw dvakrát. Třetí hrana je tedy nutně ww, což je smyčka a tedy spor. Ekvivalentně lze argumentovat, že pokud máme prostý graf, a vrchol v stupně 1, potom ho lze napojit na nějaký jiný vrchol v téže stěně, což je spor s maximalitou.
Vrchol v stupně 2 postupujeme obdobně. Nechť w_1, w_2 jsou sousedé v. Potom v sousedí se dvěma stěnami v, w_1, w_2 a v, w_1, w_2. Pokud stěny nejsou tvořeny stejnou trojicí hran, potom mezi w_1 a w_2 je násobná hrana a máme spor. Pokud jsou tvořeny stejnými hranami, potom $G = K_3$. V obou případech máme spor. Ekvivalentně můžeme argumentovat, že vrchol stupně 2 sousedí se dvěma stěnami,

a v alespoň jedná z nich se nachází vrchol, který můžeme spojit s v, čímž máme spor s maximalitou. Pokud jedna ze stěn má délku alespoň 4, lze takový vrchol najít. Pokud by obě byly trojúhelníky, dojdeme ke sporu ze stejných důvodů jako v předchozí úvaze.
Nyní stačí spočítat průměrný stupeň G. Protože více něž polovina vrcholů má stupeň alespoň 9, a zbytek má stupeň alespoň 3, průměr je ostře větší než 6, což je spor s rovinností.