**Domácí úkoly - 7. série**

**Úkol 7-1:** Graf $G$ je samodoplňkový právě tehdy když je izomorfní svému doplňku $\bar{G}$. Najděte všechny samodoplňkové kružnice, a dokažte, že žádné jiné neexistují. [3 body]
Definice: Pro $G = (V, E)$ definujeme doplněk $\bar{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$
Kde $\binom{V}{2}$ je množina všech neuspořádaných dvojic prvků z $V$
**Řešení:**
Nechť $G$ má $n$ vrcholů. Potom platí, že sjegnocení $G$ a doplňku je úplný graf ($G \cup \bar{G} = K_n$). Podotkněme, že toto sjednocení je disjunktní. Platí tedy, že $|E(G)| + |E(\bar{G})| = |E(K_n)|$. Pokud $G$ i $\bar{G}$ jsou kružnice, dostáváme rovnost $n + n = \binom{n}{2}$. Dostáváme kvadratickou rovnici $n^2 - 5n = 0$, s kořeny 0 a 5. Za standardní definice kružnice graf bez vrcholů není kružnice, musí tedy platit $G = C_5$. Nyní stačí ověřit, že $\bar{C}_5$ je isomorfní $C_5$.
Alternativně stačilo uvažovat stupně. Protože stupně v $G$ i $\bar{G}$ jsou 2, v disjunktním sjednocení $G \cup \bar{G} = K_n$ dostaneme stupně 4, tedy $K_n = K_5$.

**Úkol 7-2:** Kolik různých koster má úplný bipartitní graf $K_{2,n}$? [3 body]
**Řešení:** Označme si partitu $n$ vrcholy jako $A$ a partitu s 2 vrcholy jako $B$. Hledáme acyklický souvislý podgraf. Protože vrcholy nelze propojit uvnitř partit, aby byly vrcholy z $A$ navzájem dosažitelné, každý musí být napojen na nějaký vrchol z $B$. Aby byly vrcholy z $B$ spojené, musí sdílet nějakého souseda v $A$ (můžeme se podívat na nejkratší cestu mezi vrcholy z $B$, ta nemůže obsahovat žádný vrchol z $A$ dvakrát, a vrcholy po sobě musí pocházet z opačných partit). Navíc z acykličnosti musí mít vrchooly z $B$ právě jednoho společného souseda, ostatní vrcholy z $A$ mají tedy stupeň 1.
Pro určení počtu koster stačí vybrat vrchol z $A$, který bude mít stupeň 2 ($n$ způsobů), a následně rozdělit zbývající vycholy podle toho se kterým vrcholem z $B$ jsou spojeny ($2^{n-1}$ způsobů). Povšimněme si, že nevadí když s jedním z vrcholů z $B$ není spojený žádný vrchol z $A$. Celkem tedy máme $n2^{n-1}$ možných koster.
Poznamenejme ještě, že pro případ kdy $n = 0$ úvaha výše selže, protože v tomto případě není výchozí graf souvislý.

**Úkol 7-3:** Mějme strom s $k$ listy a vnitřními vrcholy stupně 3. Určete počet vrcholů stromu. [2 body]
**Řešení:** Mějme následující tvrzení: $n = 2k - 2$. Dokážeme indukcí. Označme si strom jako $G$, a označme si jako $T$ podgraf tvořený pouze vnitřními vrcholy $G$. Předpokládejme nejprve, že $G$ měl alespoň 2 vnitřní vrcholy. $T$ je také strom, protože je neprázdný, a získáme z $G$ (strom) odebráním všech listů (stromová indukce). Protože $T$ má alespoň 2 vrcholy, z vlastností stromů má list $v$. Vrchol $v$ je v $G$ vnitřní vrchol s právě dvěma listy. Odebráním jeho dvou listů získáme $G'$ s $k - 1$ listy ($v$ je nyní list) a $n - 2$ vrcholy. Dosazením do indukčního předpokladu získáváme $n - 2 = 2(k - 1) - 2$, což dokazuje tvrzení pro $G$. Nyní uvažme $G$ s jediným vnitřním vrcholem. Úvaha výše selže, na technickém detailu, že jediný vnitřní vrchol není list v $T$, ale stále můžeme smazat jeho dva

listy a výpočet projde. Stejně tak ale stačí nahlédnout, že v takovém případě máme $k = 3$ a $n = 4$, čímž je rovnost splněna a máme základ indukce. Co ale když $G$ nemá žádný vnitřní vrchol? Potom $k = 2$ a $n = 2$, a tedy rovnost taktéž platí (a podle toho jak jsme uvažovali výše se může jednat o základ indukce).

**Úkol 7-4:** Pro která $n$ existuje graf na $n$ vrcholech mající všechny stupně různé? Dokažte. [2 body]
**Řešení:** V grafu o $n$ vrcholech je nevyšší možný stupeň $n-1$ a nejnižší 0. Graf splňující podmínku výše by tedy musel obsahovat všechny stupně $0, 1, \ldots, n-1$. Mějme vrcholy $v$ stupně 0 a $w$ stupně $n-1$. Pokud $v \neq w$, nastává spor, protože $w$ je spojený se všemi vrcholy, tedy $wv \in E$, ale stupeň $v$ je 0. Pokud $v = w$, potom $0 = n - 1$ a máme jednovrcholový graf, pro který vlastnost unikátních stupňů platí triviálně. Poznamenejme ještě, že jsme v úvaze výše předpokládali, že graf má alespoň jeden vrchol. Pokud graf nemá žádný vrchol, potom vlastnost taktéž platí triviálně.

**Úkol 7-5:** Dokažte, že všechny $(n-2)$-regulární grafy na $n$ vrcholech jsou navzájem isomorfní. [4 body]
**Řešení:** Použijeme tvrzení ze cvičení, že grafy jsou isomorfní právě když jsou isomorfní jejich doplňky (toto někteří použili bez důkazu dříve než jsme si to dokázali na cvičení). Všechny vrcholy v doplňku $(n-2)$-regulárního grafu, $\bar{G}$, mají stupeň 1, $\bar{G}$ je tedy párování. Mějme dva $(n-2)$-regulární $G_1$ a $G_2$. Isomorfismus vybudujeme následovně, z každého páru vrcholů spojených hranou v $\bar{G_1}$ vybereme jeden libovolný, stejně vybereme vrcholy z $G_2$. Vybrané vrcholy na sebe namapujeme libovolně, a jejich partnery namapujeme na partnery jejich obrazů. Zřejmě vrcholy spojené v $\bar{G_1}$ jsou spojené v $\bar{G_2}$, a protože žádné jiné hrany v $\bar{G_1}$ ani $\bar{G_2}$ nejsou, platí o opačné tvrzení. Protože mapování je prosté (a tedy i na, z konečnosti definičního oboru, případně můžeme surjektivitu argumentovat přímo), máme isomorfosmus $\bar{G_1}$ a $\bar{G_2}$. $G_1$ a $G_2$ jsou tedy isomorfní.