Domácí úkoly - 4. série

Úkol 4-1: Rozhodněte a dokažte, zda pro relaci R na množině M platí, že $R \circ R = Id_M$ implikuje, že R je identita Id_M. [2 body]

Řešení: Tvrzení neplatí. Jako protipříklad můžeme použít třeba relaci na množině $\{x, y\}$ s dvojicemi $\{(x, y), (y, x)\}$.

Úkol 4-2: Rozhodněte a dokažte, zda pro zobrazení f a g typu $M \to M$ (tedy z množiny do sebe) platí následující 4 tvrzení. Pokud ano, dokažte, pokud ne, ukažte protipříklad.

- když $f \circ g$ je prosté potom a) f je prosté b) g je prosté
- když $f \circ g$ je na potom c) f je na d) g je na

[8 bodů] "Hint:" postupujte dle definic, ne všechna tvrzení platí

Řešení:

Zaveďme si značení $h = f \circ g$

Dokažme a) sporem. Nechť h je prosté, ale g není prosté, potom existují různé $x, y \in M$ t.ž. $g(x) = g(y) = z$. Potom ale $h(x) = f(g(x)) = f(z) = f(g(y)) = h(y)$. To je spor s prostotou h.

Dokažme c) sporem. Nechť h je na, ale f není. Existuje tedy $z \in M$ t.ž. $(\forall y \in M) f(y) \neq z$. Protože h je na, vezměme libovolý $x \in M$ t.ž. $h(x) = z$. Označme si $g(x) = y_0$, dostáváme $z = h(x) = f(g(x)) = f(y_0)$. To je spor s volbou z.

Alternativně šlo uvážit obory hodnot. Z definice skládání h obsahuje pouze páry, které mají v pravo prvky z oboru hodnot f, tedy $Rng(h) \subseteq Rng(f)$. Z předpokladů (důkazu sporem) pak plyne $M = Rng(h) \subseteq Rng(f) \subset M$.

Vyvraťme nyní b) a d). Definujme f, g jako zobrazení nad přirozenými čísly (s nulou) jako $g(x) = 2x$ a $f(x) = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ (tedy zaokrouhleno dolů). Složením zřejmě dostáváme $h(x) = f(g(x)) = \lfloor \frac{2x}{2} \rfloor = x$. Tedy h je identita (a tedy prostá i na), ale f není prostá (např. $f(1) = f(2)$) a g není na (g má v oboru hodnot pouze sudá čísla).

Poznamenejme, že pokud bychom navíc předpokládali, že M je konečná, všechna 4 tvrzení by byla pravdivá. To plyne z tvrzení dokázaného na cvičení, že pro zobrazení $M \to M$ na konečné M je prosté právě když je na.