Domácí úkoly - 3. série

Úkol 3-1: Najděte všechny relace, které jsou zároveň zároveň ekvivalence i uspořádání, a dokažte že žádné jiné neexistují. [3 body]
Řešení: Zadání odpovídají právě relace, které jsou zároveň reflexivní, symetrické, antisymetrické i transitivní.
Uvažme takovou relaci R. Pokud xRy pro $x \neq y$, potom ze symetrie plyne yRx, a z antisymetrie plyne neplatnost yRx, což je spor (s platností xRy). Dodstáváme tedy, že R může obsahovat pouze reflexivní prvky.
Alternativně můžeme použít přesně definici z přednášky. Nechť xRy je libovolná dvojice relace. Ze symetrie plyne yRx, čímž máme splněný předpoklad antisymetrie pro x, y. Antisymetrie pak dává $x = y$, tedy se jedná o reflexivní dvojici.
Z reflexivity dostáváme komplementární fakt, že R obsahuje všechny reflexivní prvky. Dohromady tedy všechny tři uvažované vlastnosti implikují, že R je diagonální relace (také nazývaná identita). Naopak diagonální relace všechny tři vlastnosti zřejmě splňuje (jak jsme si ukazovali na cvičení, v definici symetrie můžeme ekvivalentně požadovat $x \neq y$, symetrie ani antisymetrie tak o reflexivních prvcích nic neříkají).
Ještě je třeba ověřit, že R splňuje transitivitu. Nechť platí předpoklad transitivity $xRy \wedge yRz$. Z vlastností výše máme $x = y = z$ a protože xRx, tak i xRz, čímž je transitovita ověřena.

Úkol 3-2: Ukažte, že pro reflexivní relaci R platí, že R je transitivní právě když $R \circ R = R$. [7 bodů]
Platí toto i pro nereflexivní relace? [1 bod]
Řešení: Předpokládejme, že R je reflexivní, a dokažme tvrzení ve třech částech.
Začneme implikací zleva doprava, dokážeme ji jako dvě inkluze.
Dokážeme, že pro transitivní R platí $R \subseteq R \circ R$. Uvažme libovolné xRy, z reflexivity platí xRx. Složením dostaneme $x(R \circ R)y$, tedy inkluze platí.
Dokážeme, že pro transitivní R platí $R \circ R \subseteq R$. Opět uvažme libovolné $x(R \circ R)z$, z definice skládání existuje y t.ž. xRy a zároveň yRz. Aplikujme na tyto dvojice transitivitu, a dostaneme, že i xRz, což dokazuje inkluzi.
Nyní dokážeme opačnou implikaci. Předpokládejme, že $R = R \circ R$, a ověříme transitivitu. Nechť x, y, z splňují předpoklad transitivity, tedy xRy a yRz. Z definice skládání máme $x(R \circ R)z$. Z rovnosti pak plyne, že i xRz, čímž je transitivita ověřena.
K dodatečné otázce poznamenejme, že jsme reflexivitu použili pouze v první části, jako protipříklad tedy chceme najít nereflexivní transitivní R pro kterou první část selže. Použít můžeme třeba kanonickou reflexivní relaci $R = \{(x, y)\}$ (pro $x \neq y$). Zřejmě $R \not\subseteq R \circ R = \emptyset$.

Úkol 3-3: Ukažte, že relace R je reflexivní právě když pro všechny relace S (nad stejnou množinou) platí $S \subseteq R \circ S$ [4 body]

Řešení:

Pro implikaci zleva doprava předpokládejme, že R je reflexivní, dokážeme inkluzi. Nechť xSy je libovolná dvojice v S. Použijeme složení s xRx, a dostáváme $x(R \circ S)y$, čímž je inkluze dokázána.

Druhou implikaci dokážeme taktéž přímo. Nechť pro libovolnou S platí inkluze. Zafixujeme si libovolný x a zvolíme $S = \{(x, z)\}$ (pro nějaký prvek z, pro jednoduchost můžeme uvažovat $z = x$, ale není to nutné). Protože $S \subseteq R \circ S$, platí $x(R \circ S)z$. Z definice skládání dostáváme, že existuje y t.ž. $xRy \wedge ySz$. Z volby S dostáváme, že nutně $y = x$, a tedy xRx (pro libovolný x), čímž je reflexivita dokázána.