Domácí úkoly - 2. série

Úkol 2-1: Uvažujme nějaké univerzum (třeba $\mathbb{N}$) a jeho podmnožiny A, B. Zjednodušte následující výrazy (a dokažte rovnost).

a) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$

b) $A \cup (B \cap \emptyset) = A$

c) $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B$

d) $2^{\{A,B\}} = \{\{A, B\}, \{A\}, \{B\}, \emptyset\}$

[7 bodů]

Řešení:

S výjimkou příkladu d, který se řešil přímo z definice šlo všechny tři příklady řešit mnoha přístupy přístupy. Bylo možné využít distributovních zákonů dokázaných na cvičení nebo převedením na výrokovou logiku náležení a postupovat stejně jako jsme dokazovali distributivní zákony na cvičení (zde bylo možné postupovat přímo, obměnou, či sporem).

Ukázka řešení a) pomocí distributivních zákonů:

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap \mathbb{U} = A$$

Kde první rovnost plyne z distributívního zákona. Třetí plyne z faktu, že $A \subseteq \mathbb{U}$ protože $\mathbb{U}$ je univerzum. Druhá rovnost plyne z definice komplementu následovně:

$$B \cup \overline{B} = B \cup (\mathbb{U} \backslash B) = \mathbb{U}$$

Kde první rovnost je definice komplementu a druhá rovnost platí protože z množiny univezra odebíráme B a následně B přidáváme. Tím obecně dostaneme nadmnožinu, ale protože $B \subseteq \mathbb{U}$, přidání a odebrání jsou zde vzájemně inverzní.

Ukázka řešení c) přímo:

Tvrdíme, že platí rovnost výše, dokážeme dvě inkluze.

$x \in A \cap B \implies x \in A \wedge x \in B \implies x \notin \overline{A} \wedge x \notin \overline{B} \implies x \notin \overline{A} \cup \overline{B} \implies x \in \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$

$x \in \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \implies x \notin \overline{A} \cup \overline{B} \implies x \notin \overline{A} \wedge x \notin \overline{B} \implies x \in A \wedge x \in B \implies x \in A \cap B$

Řešení d): Z definice potenční množiny $2^{\{A,B\}} = \{\{A, B\}, \{A\}, \{B\}, \emptyset\}$. Výraz odpovídá potenční množině dvouprvkové množiny, s dvěma prvky A a B. Fakt, že A a B jsou množiny zde nehraje žádnou roli. Postupujeme stejně jako pro jakékoliv jiné prvky (Např. $2^{\{3,5\}} = \{\{3, 5\}, \{3\}, \{5\}, \emptyset\}$).

Úkol 2-2: Pro libovolnou konečnou množinu M velikosti n určete, kolik má podmnožin liché a sudé velikosti. [6 bodů]

Označme L_n počet lichých podmnožin a S_n počet sudých. Protože každá n-prvková množin má 2^n podmnožin, nutně platí $S_n + L_n = 2^n$. Chceme dokázat, že $S_n = L_n = 2^{n-1}$, k tomu nám stačí dokázat buď $L_n = 2^{n-1}$ (nebo $S_n = 2^{n-1}$) nebo, že $S_n = L_n$.

Poznámka: tyto vztahy platí pro všechny množiny kromě $\emptyset$. Za povšimnutí tohoto faktu byl malý bonus.

Řešení 1 - eliminací prvku (indukce)

Předpokládejme, že $n > 1$, tvrzení platí pro $n-1$ (indukční předpoklad) a vybereme prvek $a \in M$. Označme si počty lichých a sudých podmnožin $M\backslash\{a\}$ jako L_{n-1} a S_{n-1}. Každá lichá podmnožina M buď neobsahuje a a je tedy podmnožina $M\backslash\{a\}$ (takových je L_{n-1} z IP), nebo obsahuje a a potom se jedná o sudou podmnožinu $M\backslash\{a\}$ s přidaným prvkem a (takových je S_{n-1}). Dostáváme, že lichých podmnožin M je celkem $L_{n-1} + S_{n-1}$. Z toho buď vyvodíme, že počet lichých podmnožin M je stejný jako počet všech podmnožin $M\backslash\{a\}$, tedy 2^{n-1}; nebo provedeme stejný argument pro sudé podmnožiny a vyvodíme, že M má stejně lichých a sudých podmnožin.

Musíme ještě ověřit základ indukce. Pro $n = 1$ máme $M = \{x\}$ pro nějaký prvek x, a právě jednu lichou podmnožinu $\{x\}$ a jednu sudou podmnožinu $\emptyset$.

Řešení 2 - $S = L$ binomickou větou

Počet lichých a sudých podmnožin lze vyjádřit jako:

$$S = \sum_{i\_sude}^{n} \binom{n}{i}; L = \sum_{i\_liche}^{n} \binom{n}{i}$$

Uvažme rozdíl $S - L$ zapsaný jako řadu kombinačních čísel. Dostáváme všechna kombinační čísla (typu n nad i přes všechna i) s alternujícími znaménky:

$$S - L = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n} 1^{n-i} (-1)^i \binom{n}{i} = (1-1)^n = 0$$

Úpravou výrazu v druhé rovnosti jsme dostali tvar binomické věty. Binomická věta potom dáva třetí rovnost. Tím jsme dokázali, že rozdíl S a L je 0, a tedy $S = L$ pro všechna n, kromě 0! Poznamenejme, že pro $n = 0$ nelze třetí rovnost (aplikaci binomické věty) použít. Místo toho platí $S - L = 1$.

Řešení 3 - $S = 2^{n-1}$ vlastnostmi kombinačních čísel

Uvažme opět vyjádření S jako sumu kombinačních čísel. Za vztahů pro sčítání kombinačních čísel máme $\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i}$ (pokud $n > 0$). Poznamenejme, že tento vztah platí i pokud některá z kombinačních čisel nejsou dobře definována (tehdy jejich hodnotu standardně považujeme za 0). Nahrazením všech kombinačních čísel ve výrazu pro S dle vzorce dostáváme:

$$S = \sum_{i\_sude}^{n} \binom{n}{i} = \sum_{i\_sude}^{n} \binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i} = \binom{n-1}{-1} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} = 0 + 2^{n-1}$$

Poznamenejme, že tento postup nefunguje pro $n = 0$.

Princip tohoto postupu lze nejlépe nahlédnout přes Pascalův trojúhelník. Jinými slovy lze argument ukázat tak, že každý prvek Pascalova trojúhelníku (mimo $\binom{0}{0}$) je součtem prvků nad ním. Pokud tedy sečteme každý druhý člen jednoho řádku, dostaneme součet všech prvků v řádku o jedna výše. Opět, aby tento argument dával smysl, musí existovat vyšší řádek, tedy $n > 0$.

Řešení 4 - $S = L$ párováním množin

Předpokládejme, že $n > 0$ a zvolme prvek $a \in M$. Pro každou podmnožinu $N \subseteq M$ definujeme dvojče $f(N)$ následujícím vztahem. Pokud $a \in N$, pak $f(N) = N \setminus \{a\}$, a pokud $a \notin N$, potom $f(N) = N \cup \{a\}$. Všimneme si, že $f^{-1} = f$ protože definice je symetrická. Jedná se tedy o bijekci představující párování množin. Alternativně stačí ukázat, že $f(f(N)) = N$ z definice.

Máme tedy párování množin, které navíc páruje množiny s velikostí lišící se právě o 1 (o prvek a), což dokazuje že počet lichým podmnožin odpovídá počtu sudých podmnožin. Poznamenejme, že pro $n = 0$ nelze zvolit prvek a, a argument selže.

Úkol 2-3: Pro dvě množiny A a B určete počet různých podmnožin jejich kartézského součinu $A \times B$. [2 body]

Prvky kartézského součinu jsou právě všechny uspořádané dvojice prvků, první z A a druhý z B. Dostáváme tedy $|A| * |B|$ prvků. Zdůrazněme, že ačkoliv tyto prvky jsou samy o sobě množiny, nejedná se o podmnožiny kartézského součinu!

Pro každou množinu M platí, že velikost její potenční množiny je $2^{|M|}$ (tedy 2 na velikost množiny). Počet podmnožin kartézského součinu je tedy $2^{|A|*|B|}$.