Domácí úkoly řešení - 1. série

Úkol 1-1: Charakterizace výherních a proherních pozic pro Nim s následujícími tahy

a) 1 nebo 4 zápalky

b) jakoukoliv mocninu čísla 2 zápalek

c) jakoukoliv mocninu čísla 3 zápalek

Definice:
Pozice (reprezentovaná číslem p) je

- proherní (P) $\Leftrightarrow$ všechny tahy vedou na výherní pozice nebo $p = 1$
- výherní (V) $\Leftrightarrow$ existuje tah vedoucí na proherní pozici.

V případě a) jsou proherní pozice právě takové jejichž zbytek po dělení 5 je 1 nebo 3.
Základ indukce: Ověříme platnost pro $5k + 1, \dots, 5k + 5$ pro $k = 0$.
Pro výherní pozice stačí ukázat existenci konkrétního tahu. Pro pozici 1 platí tvrzení z definice, pro pozici 3 existuje jediný tah vedoucí na pozici 2, která je výherní.

1	2	3	4	5
P	V	P	V	V
z def.	tah 1	$\to 2(V)$	tah 1	tah 4

Indukční krok: Předpokládáme platnost tvrzení pro nějaké k, dokazujeme platnost pro $(k + 1)$, tedy pro pozice $5(k + 1) + 1, \dots, 5(k + 1) + 5$ neboli $5k + 6, \dots, 5k + 10$

5k+1	5k+2	5k+3	5k+4	5k+5	5k+6	5k+7	5k+8	5k+9	5k+10
P	V	P	V	V	P	V	P	V	V
indukční předpoklad					$\to 5k + 5(V)$	tah 1	$\to 5k + 7(V)$	tah 1	tah 4
					$\to 5k + 2(V)$		$\to 5k + 4(V)$		

Kde pro ověření platnosti pro $5k+7$ a $5k+8$ je třeba nejprve ověřit nižší pozice.

V případě b) jsou proherní pozice právě ty, které mají zbytek po dělení třemi právě 1. Nejprve si všimneme, že žádná mocnina dvojky není dělitelná třemi. Tedy každý tah změní zbytek po dělení 3.
Základ indukce: Snadno ověříme, že z pozic $1, 2, 3$ je právě 1 jediná proherní.
Indukční krok: Dokazujeme platnost tvrzení pro $3k+1, 3k+2, 3k+3$, předpokládáme platnost pro všechny pozice nižší než $3k + 1$.
Pozice $3k + 1$ je proherní protože libovolný tah změní zbytek po dělení 3, tedy dostaneme pozici menší než $3k + 1$ se zbytkem po dělení třemi 0 nebo 2, z indukčního předpokladu jsou všechny takové pozice výherní, $3k + 1$ je tedy proherní.
Pozice $3k + 2$ a $3k + 3$ jsou výherní použitím tahů 1 a 2 resp., čímž dostáváme proherní pozici $3k + 1$.

V případě c) jsou výherní právě sudé pozice. Pro pozice 1 a 2 ověříme snadno. Protože všechny mocniny 3 jsou liché, každý tah změní paritu pozice. Ze sudých pozic tedy všechny tahy vedou na liché pozice a naopak. Jako indukční krok tedy předpokldáme platnost pro tvrzení pro pozice nižší než $2k + 1$. Pozice $2k+1$ (lichá) dovoluje pouze tahy na sudé pozice menší než $2k+1$, tedy výherní z i.p., a je tedy proherní. Pozice $2k + 2$ je výherní použitím tahu 1.

Úkol 1-2: Mějme množinu M_n všech čísel, která lze zapsat jako

$$M_n = \{\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots \pm (n-1) \pm n\}$$

(tedy prvky jsou právě čísla zíkaná nahrazením každého $\pm$ za $+$ nebo $-$ nezávisle na ostatních).
Rozhodněte jaká čísla obsahuje M_n a dokažte (pro obecné n)

Pozorování: volbou všech znamének jako $+$ získáme maximum M_n rovné výrazu $\sum_{i=1}^{n}(i) = \frac{n^2+n}{2} = max_n$. Obdobně najdeme minimum. Dále můžeme odvodit, že max_n je sudé právě když $n^2 + n = n(n+1)$ je delitelné 4. Protože pouze jeden z činitělů může být sudý, musí být n nebo $n+1$ dělitelné 4. Pokud ani jeden z činitelů není dělitelný 4, $n(n+1)$ není dělitelné 4, a tedy max_n je liché.
Pozorování: pro každé dvě čísla z M_n lze z jednoho vytvořit druhé překlápěním znamének po jednom. Každé překlopení jednoho znaménka změní součet o sudou hodnotu (přičítáme/odečítáme dané číslo 2x). Všechny prvky tedy musí mít stejnou paritu jako maximum a minimum.
Nyní je třeba dokázat, že M_n obsahuje všechna čísla mezi max_n a min_n správné parity.
Důkaz 1: Indukcí ukážeme, že M_n obsahuje všechna taková čísla. Pro $n = 1$ to platí zřejmě. Předpokládejme tedy, že M_{n-1} obsahuje všechna příslušná čísla od min_{n-1} po max_{n-1}.
Vezmeme všechny prvky M_{n-1} a přičteme k nim n, výsledné prvky všechny patří do M_n. Tím dostáváme množinu obsahující všechny prvky od nejnižšího $min_{n-1} + n \leq 0$ (pro $n \leq 2$) po nejvyšší $max_{n-1} + n = max_n$. Dostáváme tedy všechna kladná čísla, která mají být v M_n. Analogicky dostaneme všechna záporná čísla. Dohromady jsme ukázali, že všechna čísla mezi min_n a max_n lze vyjádřit zafixováním znaménka u n (na $+$ pro kladná a $-$ pro záporná), a nastavením zbytku znamének dle indukčního předpokladu.
Důkaz 2: Indukcí ukážeme, že každé takové číslo lze vyjádřit. Pro $n = 1$ tvrzení platí zřejmě. Pro obecné n předpokládáme platnost pro $n-1$, a uvažme libovolné $min_n \leq k \leq max_n$, které má dle tvrzení patřit do M_n. Búno nechť k je nezáporné. Ukážeme, že k lze vyjádřit. Zafixujeme znaménko u n na plus, a z indukce zvolíme ostatní znaménka tak, aby součet ostatních prvků byl $k - n$. Výběrem platí $max_{n-1} \geq \frac{n^2+n}{2} - n \geq k - n \geq 0 - n \geq min_{n-1}$, kde poslední nerovnost platí pro $n \geq 2$.
Protože $k-n$ má správnou paritu, a leží v rozpětí M_{n-1}, z indukčního předpokladu je možné $k - n$ získat volbou znamének v M_{n-1}, a tedy lze k získat v M_n.
Důkaz 3: Nechť $k \in M_n$ a zároveň $k < max_n$, ukážeme, že $k+2 \in M_n$. Protože $min_n \in M_n$, z indukce pak bude platit, že M_n obsahuje všechna čísla mezi min_n

a max_n správné parity. Číslo k lze vyjádřit volbou znamének a protože k není maximum, jedno ze znamének je mínus. Pokud je mínus u 1, změníme ho na plus a máme hotovo. V opačném případě zvolíme $j \geq 2$ jako nejmenší číslo ve výrazu s mínusem. Z volby j platí, že znaménko u $j-1$ je plus. Obrátíme obě znaménka, čímž hodnotu výrazu zvýšíme o $2j - 2(j-1) = 2$.