Střední hodnota

Příklad 1: Určete počet pevných bodů (t.j. $\pi(i) = i$) v náhodné permutaci π. (Uvědomte si, že tyto jevy jsou závislé, jak jsme dokázali na minulém cvičení)

Příklad 2: Vezměme náhodnou posloupnost $\{0, 1\}^n$ Kolik různých šestic po sobě jdoucích stejných znaků můžeme očekávat? Kolik (maximálních) souvislých úseků stejných znaků můžeme očekávat?

Příklad 3: Vytvořme náhodný graf na n vrcholech tak, že každá hrana v grafu bude s pstí. 1/2. Označme si počet trojúhelníků v grafu jako náh. prom. X.
Jaká je střední hodnota X?
Použitím Markovovy nerovnosti ukažte, že $P[X \geq n^3/24] < 1/2$

Rozptyl a odhady

Příklad 4: Určete rozptyl indikátorové proměnné s pravděpodobností p.

Příklad 5: Určete rozptyl hodnoty hodu spravedlinou n-stěnnou kostkou.

Příklad 6: Hrajeme hru, kde opakovaně házíme 6-stěnnou kostkou. Všimli jsme si, že za posledních 100 hodů soupeři padlo v součtu 400 bodů. Odhadněte s jakou pravděpodobností jeho kostka není spravedlivá.

Uspořádání

Pojmy: největší prvek, maximální prvek, řetězec, antiřetězec

Příklad 7: Rozhodněte zda existuje uspořádání s následujícími vlastnostmi:

- má maximální prvek, ale nema největší
- má největší prvek, ale nama maximální
- má nekonečně mnoho minimálních, ale namá maximální
- má jediný minimální prvek, který není nejmenší

Příklad 8: Přes čtvercové město se plánuje n line metra mezi východním a západním okrajem. Chceme minimalizovat počet různých hloubek linek (každá linka je celá ve fixní hloubce) tak aby se linky neprotínaly. Jak najdeme optimální řešení?

Střední hodnota

Příklad 1: Určete počet pevných bodů (t.j. $\pi(i) = i$) v náhodné permutaci π. (Uvědomte si, že tyto jevy jsou závislé, jak jsme dokázali na minulém cvičení)

Příklad 2: Vezměme náhodnou posloupnost $\{0,1\}^n$ Kolik různých šestic po sobě jdoucích stejných znaků můžeme očekávat? Kolik (maximálních) souvislých úseků stejných znaků můžeme očekávat?

Příklad 3: Vytvořme náhodný graf na n vrcholech tak, že každá hrana v grafu bude s pstí. 1/2. Označme si počet trojúhelníků v grafu jako náh. prom. X.
Jaká je střední hodnota X?
Použitím Markovovy nerovnosti ukažte, že $P[X \geq n^3/24] < 1/2$

Rozptyl a odhady

Příklad 4: Určete rozptyl indikátorové proměnné s pravděpodobností p.

Příklad 5: Určete rozptyl hodnoty hodu spravedlinou n-stěnnou kostkou.

Příklad 6: Hrajeme hru, kde opakovaně házíme 6-stěnnou kostkou. Všimli jsme si, že za posledních 100 hodů soupeři padlo v součtu 400 bodů. Odhadněte s jakou pravděpodobností jeho kostka není spravedlivá.

Uspořádání

Pojmy: největší prvek, maximální prvek, řetězec, antiřetězec

Příklad 7: Rozhodněte zda existuje uspořádání s následujícími vlastnostmi:

- má maximální prvek, ale nema největší
- má největší prvek, ale nama maximální
- má nekonečně mnoho minimálních, ale namá maximální
- má jediný minimální prvek, který není nejmenší

Příklad 8: Přes čtvercové město se plánuje n line metra mezi východním a západním okrajem. Chceme minimalizovat počet různých hloubek linek (každá linka je celá ve fixní hloubce) tak aby se linky neprotínaly. Jak najdeme optimální řešení?

Mějme pravděpodobnostní prostor Ω s pravděpodobnostní fukcí p a náhodnými proměnnými X, Y definovanými na jeho elementárních jevech.

Střední hodnota

Definice:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p(\omega)$$

Linearita:

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$$

Speciálně pokud Y lze vyjádřit jako součet indikátorů $Y = \sum_i Y_i$

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_i \mathbb{E}[Y_i]$$

Markovova nerovnost:

$$P[X \geq t\mathbb{E}[X]] \leq \frac{1}{t}$$

Rozptyl

Definice:

$$\mathbb{V}ar[X] = \mathbb{E}\Big[(X - \mathbb{E}[X])^2\Big]$$

$$\mathbb{V}ar[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X]$$

Pro nezávislé (!!!) X, Y platí "linearita":

$$\mathbb{V}ar[aX + bY] = a^2\mathbb{V}ar[X] + b^2\mathbb{V}ar[Y]$$

Čebyševova nerovnost (pro nezápornou X):

$$P\Big[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t\sqrt{\mathbb{V}ar[X]}\Big] \leq \frac{1}{t^2}$$

$$P\Big[|X - \mathbb{E}[X]| \geq d\Big] \leq \frac{\mathbb{V}ar[X]}{d^2}$$

Mějme pravděpodobnostní prostor Ω s pravděpodobnostní fukcí p a náhodnými proměnnými X, Y definovanými na jeho elementárních jevech.

Střední hodnota

Definice:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p(\omega)$$

Linearita:

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$$

Speciálně pokud Y lze vyjádřit jako součet indikátorů $Y = \sum_i Y_i$

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_i \mathbb{E}[Y_i]$$

Markovova nerovnost:

$$P[X \geq t\mathbb{E}[X]] \leq \frac{1}{t}$$

Rozptyl

Definice:

$$\mathbb{V}ar[X] = \mathbb{E}\Big[(X - \mathbb{E}[X])^2\Big]$$

$$\mathbb{V}ar[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X]$$

Pro nezávislé (!!!) X, Y platí "linearita":

$$\mathbb{V}ar[aX + bY] = a^2\mathbb{V}ar[X] + b^2\mathbb{V}ar[Y]$$

Čebyševova nerovnost (pro nezápornou X):

$$P\Big[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t\sqrt{\mathbb{V}ar[X]}\Big] \leq \frac{1}{t^2}$$

$$P\Big[|X - \mathbb{E}[X]| \geq d\Big] \leq \frac{\mathbb{V}ar[X]}{d^2}$$