**Pojmy:** pravděpodobnostní prostor, elementární jev, jev, nezávislost

**Příklad 1:** Máme stejné množství červených a modrých párů ponožek. Levé a pravé ponožky uchováváme v jiných šuplících. Z každého šuplíku vytáhneme náhodnou ponožku. Jestliže víme, že alespoň jedna z ponožek je modrá, s jakou pravděpodobností je druhá také modrá?

**Příklad 2:** Ukažte, že pokud hodíme dvaceti (6-stěnnými) kostkami, potom s pstí přesně 1/2 budou na alespoň 10 kostkách hodnoty alespoň 4.

**Příklad 3:** Jaká je pravděpodobnost, že z 25 lidí mají dva stejné narozeniny?

**Příklad 4:** Hodíme jednou kostkou. Rozdhodněte, které dvojice následujících jevů jsou nezávislé pro 6-stěnnou a 8-stěnnou kostku:
padlo sudé číslo; padlo nadprůměrné číslo; padlo prvočíslo

**Příklad 5:** Mějme $\pi$ náhodnou permutaci množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Jsou jevy $\pi(1) = 1$ a $\pi(2) = 3$ nezávislé?

**Příklad 6:** Z fixní abecedy o $n$ znacích náhodně vygenerujeme náhodný $k$-znakový řetězec (tak, že $k$-krát vybereme náhodný znak). S jakou pravděpodobností řetězec neobsahuje opakovaný symbol?

**Příklad 7:** Vybereme náhodnou $k$-prvkovou podmnožinu $\{1, 2, \ldots, n\}$. S jakou pstí neobsahuje žádná dvě po sobě jdoucí čísla?

**Příklad 8:** V království se rozhoduje, kteří tři šlechtici se utkají s drakem o princeznu. Přišlo celkem 12 šlechticů. Ve dvanácti pohárech vína jsou rozmístěny 3 prsteny, vybráni jsou ti, kteří najdou ve svém poháru prsteny. Král nechá tajně prsteny dát pouze do šesti konkrétních pohárů, ze kterých si vyberou jeho synové. Situaci ale komplikuje špión. Ten zařídí, že první dva prsteny jsou umístěny zcela náhodně a pouze třetí je umístěn dle příkazů krále.

- S jakou pravděpodobností by byli vybráni alespoň dva z princů, kdyby nebylo špióna?
- S jakou pravděpodobností jsou alespoň dva vybráni po zásahu špióna?
- Jak se příchodem špiona změnila pravděpodobnost, že všichni tři princové budou vybráni?

**Příklad 9:** V krabici je 8 žárovek, z toho 2 vadné. Vybereme náhodně tři. Jaká je očekávaná hodnota počtu vybraných vadných žárovek?

**Příklad 10:** Určete střední hodnotu počtu pevných bodů (t.j. $\pi(i) = i$) v náhodné permutaci $\pi$ na $[n]$. (Uvědomte si, že tyto jevy jsou závislé)

**Pojmy:** pravděpodobnostní prostor, elementární jev, jev, nezávislost

**Příklad 1:** Máme stejné množství červených a modrých párů ponožek. Levé a pravé ponožky uchováváme v jiných šuplících. Z každého šuplíku vytáhneme náhodnou ponožku. Jestliže víme, že alespoň jedna z ponožek je modrá, s jakou pravděpodobností je druhá také modrá?

**Příklad 2:** Ukažte, že pokud hodíme dvaceti (6-stěnnými) kostkami, potom s pstí přesně 1/2 budou na alespoň 10 kostkách hodnoty alespoň 4.

**Příklad 3:** Jaká je pravděpodobnost, že z 25 lidí mají dva stejné narozeniny?

**Příklad 4:** Hodíme jednou kostkou. Rozdhodněte, které dvojice následujících jevů jsou nezávislé pro 6-stěnnou a 8-stěnnou kostku:
padlo sudé číslo; padlo nadprůměrné číslo; padlo prvočíslo

**Příklad 5:** Mějme $\pi$ náhodnou permutaci množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Jsou jevy $\pi(1) = 1$ a $\pi(2) = 3$ nezávislé?

**Příklad 6:** Z fixní abecedy o $n$ znacích náhodně vygenerujeme náhodný $k$-znakový řetězec (tak, že $k$-krát vybereme náhodný znak). S jakou pravděpodobností řetězec neobsahuje opakovaný symbol?

**Příklad 7:** Vybereme náhodnou $k$-prvkovou podmnožinu $\{1, 2, \ldots, n\}$. S jakou pstí neobsahuje žádná dvě po sobě jdoucí čísla?

**Příklad 8:** V království se rozhoduje, kteří tři šlechtici se utkají s drakem o princeznu. Přišlo celkem 12 šlechticů. Ve dvanácti pohárech vína jsou rozmístěny 3 prsteny, vybráni jsou ti, kteří najdou ve svém poháru prsteny. Král nechá tajně prsteny dát pouze do šesti konkrétních pohárů, ze kterých si vyberou jeho synové. Situaci ale komplikuje špión. Ten zařídí, že první dva prsteny jsou umístěny zcela náhodně a pouze třetí je umístěn dle příkazů krále.

- S jakou pravděpodobností by byli vybráni alespoň dva z princů, kdyby nebylo špióna?
- S jakou pravděpodobností jsou alespoň dva vybráni po zásahu špióna?
- Jak se příchodem špiona změnila pravděpodobnost, že všichni tři princové budou vybráni?

**Příklad 9:** V krabici je 8 žárovek, z toho 2 vadné. Vybereme náhodně tři. Jaká je očekávaná hodnota počtu vybraných vadných žárovek?

**Příklad 10:** Určete střední hodnotu počtu pevných bodů (t.j. $\pi(i) = i$) v náhodné permutaci $\pi$ na $[n]$. (Uvědomte si, že tyto jevy jsou závislé)

**Domácí úkoly - 10. série**

**Úkol 10-1:** Hodíme $k$-stěnnou kostkou (s hodnotami $1, 2, \ldots, k$) a pokud nám padne nejvyšší možná hodnota (tedy $k$), házíme znovu (a opakujeme dokud padají nejvyšší čísla). Výsledkem hodu je součet všech hodnot. Jaká je střední hodnota výsledku? Chceme co nejednodušší vyjádření (zcela bez sum), stejně výpočet lze provést zcela bez sum. [2 body]

**Úkol 10-2:** Hodíme $k$ kostkami (6-stěnnými) a výsledek přečteme jako $k$-ciferné číslo (předpokládáme, že kostky mají fixování pořadí ve kterém je čteme).

- Jaká je střední hodnota výsledku pro $k = 4$? [2 body]
- Pro $k = 2$ porovnejte střední hodnotu normálního hráče, a hráče, který podvídá tak, že vyšší kostku vždy přečte jako vyšší cifru čísla. [2 body]

**Úkol 10-3:** Jsme v nemocnici během malé epidemie virózy $X$. Předpokládámě, že $1/4$ pacientů má virózu $X$. Na vyšetřování pacientů máme dva tesy. První test ($A$) odhalí nemoc se spolehlivostí 90%, ale vyjde falešně pozitivní s pstí 20%. Druhý test ($B$) odhalí nemoc s pstí pouze 70%, ale dá false-positive s pstí. pouze 10%. Navíc máme lék ($L$) se 75% účinností.
Máme pacienta u kterého první test vyšel pozitivně, pacientovi byl nasazen lék a později byl proveden druhý test, který vyšel negativně. Jaké jsou psti, že pacient virózu $X$ neměl, že se vyléčil a že ji stále má? [6 bodů]

**Úkol 10-4:**
Hodíme 60-krát 6-stěnnou kostkou. Jako náhodnou veličinu $X$ si označme počet hodů kdy padlo číslo 1. Zajímá nás odhad na to s jakou nejvyšší přavděpodobností bude $X \geq 20$.
Použijte Markovovu nerovnost. Pro výpočet střední hodnoty si označme $X_i$ náhodnou proměnnou, která je 1 pokud v i-tém pokusu padlo číslo 1, a je 0 ve všech ostatních případech. Střední hodnota $X$ se odvodí linearitou ze středních hodnot $X_i$. [2 body]
Použijte Čebyševovu nerovnost. Pro výpočet rozptylu si stačí uvědomit, že proměnné $X_i$ jsou nezávislé. Proto, a pouze proto (!!!) můžeme rozptyl $X$ určit jako součet rozptylů $X_i$. Pro výpočet rozptylů $X_i$ můžete využít obecně platného vztahu:

$$\mathbb{V}ar[X_i] = \mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}^2[X_i]$$

Z Čebyševovy nerovnosti by mělo vyjít, že pravděpodobnost je o něco menší než $1/10$. [6 bodů]

**Domácí úkoly - 10. série**

**Úkol 10-1:** Hodíme $k$-stěnnou kostkou (s hodnotami $1, 2, \ldots, k$) a pokud nám padne nejvyšší možná hodnota (tedy $k$), házíme znovu (a opakujeme dokud padají nejvyšší čísla). Výsledkem hodu je součet všech hodnot. Jaká je střední hodnota výsledku? Chceme co nejednodušší vyjádření (zcela bez sum), stejně výpočet lze provést zcela bez sum. [2 body]

**Úkol 10-2:** Hodíme $k$ kostkami (6-stěnnými) a výsledek přečteme jako $k$-ciferné číslo (předpokládáme, že kostky mají fixování pořadí ve kterém je čteme).

- Jaká je střední hodnota výsledku pro $k = 4$? [2 body]
- Pro $k = 2$ porovnejte střední hodnotu normálního hráče, a hráče, který podvídá tak, že vyšší kostku vždy přečte jako vyšší cifru čísla. [2 body]

**Úkol 10-3:** Jsme v nemocnici během malé epidemie virózy $X$. Předpokládámě, že 1/4 pacientů má virózu $X$. Na vyšetřování pacientů máme dva tesy. První test ($A$) odhalí nemoc se spolehlivostí 90%, ale vyjde falešně pozitivní s pstí 20%. Druhý test ($B$) odhalí nemoc s pstí pouze 70%, ale dá false-positive s pstí. pouze 10%. Navíc máme lék ($L$) se 75% účinností.
Máme pacienta u kterého první test vyšel pozitivně, pacientovi byl nasazen lék a později byl proveden druhý test, který vyšel negativně. Jaké jsou psti, že pacient virózu $X$ neměl, že se vyléčil a že ji stále má? [6 bodů]

**Úkol 10-4:**
Hodíme 60-krát 6-stěnnou kostkou. Jako náhodnou veličinu $X$ si označme počet hodů kdy padlo číslo 1. Zajímá nás odhad na to s jakou nejvyšší pravděpodobností bude $X \geq 20$.
Použijte Markovovu nerovnost. Pro výpočet střední hodnoty si označme $X_i$ náhodnou proměnnou, která je 1 pokud v i-tém pokusu padlo číslo 1, a je 0 ve všech ostatních případech. Střední hodnota $X$ se odvodí linearitou ze středních hodnot $X_i$. [2 body]
Použijte Čebyševovu nerovnost. Pro výpočet rozptylu si stačí uvědomit, že proměnné $X_i$ jsou nezávislé. Proto, a pouze proto (!!!) můžeme rozptyl $X$ určit jako součet rozptylů $X_i$. Pro výpočet rozptylů $X_i$ můžete využít obecně platného vztahu:

$$\mathbb{V}ar[X_i] = \mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}^2[X_i]$$

Z Čebyševovy nerovnosti by mělo vyjít, že pravděpodobnost je o něco menší než 1/10. [6 bodů]