Příklad 1: Pro která n existuje graf na n vrcholech s právě n kostrami?

Příklad 2: Definujeme matici sousednosti A_G grafu G t.ž. $(a_i j)$ je 1 právě když $v_i v_j \in E(G)$. Jaké hodnoty jsou na diagonále A^2? Jaké hodnoty jsou na ostatních pozicích?

Příklad 3: Dokažte nerovinnost Petersonova grafu.

Příklad 4: Ukažte, že každý rovinný graf lze vyjádřit jako sjednocení 5 hranově disjunktních lesů (na stejných vrcholech).

Příklad 5: Ukažte, že pokud graf G lze rovinně nakreslit jako jediný cyklus s úhlopříčkami, potom je 2-degenerovaný.

Příklad 6: Najděte všechny souvislé k-regulární rovinné grafy t.ž. všechny jejich stěny mají stejnou délku s. Najděte duály těchto grafů.
Označme n počet vrcholů, e počet hran, f počet stěn
Plná útoku:

- vyjádřete e pomocí k a zvlášť pomocí s
- eliminujte z Eulerovy formule n a f
- ukažte, že $2 \leq k \leq 5$ pro konečné grafy
- charakterizujte grafy pro $k = 2$
- ukažte, že $3 \leq s \leq 5$ pro $k \geq 3$ a konečný graf
- ukažte, že pokud $s \geq 4$ potom $k \leq 3$ pro konečné grafy
- určete hodnoty parametrů pro nekonečné grafy
- najděte grafy splňující zbývající konfigurace, včetně nekonečných

Pravděpodobnost

Příklad 7: Hodili jsme 4x kostkou, a 4x padlo číslo 6. S jakou pravděpodobností padne 6 i při pátém hodu?

Příklad 8: Víme, že Anežka umí v hlavě počítat komplikované pravděpodobnostní výpočty rychleji než kdokoliv na světě. Co je pravděpodobnější, že je Anežka malířka, nebo že je malířka hrající profesionálně poker?

Příklad 9: Hodíme n-krát mincí. S jakou pravděpodobností padne právě k hlav? S jakou pravděpodobností bude počet hlav sudý?

Příklad 10: V loterii tipuje hráč 10 čísel z 80ti. Společnost následně vylosuje 20 čísel z 80ti. Hráč vyhraje pokud jeho 10 čísel je mezi 20ti vylosovanými. Jakou má šanci vyhrát? Jakou by měl šanci, kdyby tipoval 20 čísel, společnost losovala 10 a vyhrál by když uhodne všechny vylosované?

Příklad 1: Pro která n existuje graf na n vrcholech s právě n kostrami?

Příklad 2: Definujeme matici sousednosti A_G grafu G t.ž. (a_ij) je 1 právě když $v_iv_j \in E(G)$. Jaké hodnoty jsou na diagonále A^2? Jaké hodnoty jsou na ostatních pozicích?

Příklad 3: Dokažte nerovinnost Petersonova grafu.

Příklad 4: Ukažte, že každý rovinný graf lze vyjádřit jako sjednocení 5 hranově disjunktních lesů (na stejných vrcholech).

Příklad 5: Ukažte, že pokud graf G lze rovinně nakreslit jako jediný cyklus s úhlopříčkami, potom je 2-degenerovaný.

Příklad 6: Najděte všechny souvislé k-regulární rovinné grafy t.ž. všechny jejich stěny mají stejnou délku s. Najděte duály těchto grafů.
Označme n počet vrcholů, e počet hran, f počet stěn
Plná útoku:

- vyjádřete e pomocí k a zvlášť pomocí s
- eliminujte z Eulerovy formule n a f
- ukažte, že $2 \leq k \leq 5$ pro konečné grafy
- charakterizujte grafy pro $k = 2$
- ukažte, že $3 \leq s \leq 5$ pro $k \geq 3$ a konečný graf
- ukažte, že pokud $s \geq 4$ potom $k \leq 3$ pro konečné grafy
- určete hodnoty parametrů pro nekonečné grafy
- najděte grafy splňující zbývající konfigurace, včetně nekonečných

Pravděpodobnost

Příklad 7: Hodili jsme 4x kostkou, a 4x padlo číslo 6. S jakou pravděpodobností padne 6 i při pátém hodu?

Příklad 8: Víme, že Anežka umí v hlavě počítat komplikované pravděpodobnostní výpočty rychleji než kdokoliv na světě. Co je pravděpodobnější, že je Anežka malířka, nebo že je malířka hrající profesionálně poker?

Příklad 9: Hodíme n-krát mincí. S jakou pravděpodobností padne právě k hlav? S jakou pravděpodobností bude počet hlav sudý?

Příklad 10: V loterii tipuje hráč 10 čísel z 80ti. Společnost následně vylosuje 20 čísel z 80ti. Hráč vyhraje pokud jeho 10 čísel je mezi 20ti vylosovanými. Jakou má šanci vyhrát? Jakou by měl šanci, kdyby tipoval 20 čísel, společnost losovala 10 a vyhrál by když uhodne všechny vylosované?

Domácí úkoly - 9. série

Úkol 9-1: Zamíchejme náhodně balíček (52) karet. Jaká je pravděpodobnost, že srdcové eso je v balíčku před pikovou dámou? Jaká je pravděpodobnost, že je přímo před ní (tedy nejsou mezi nimi žádné karty)? [3 body]

Úkol 9-2: Na objednávku 3 pytlů černého a 3 pytlů zeleného čaje přišly tři krabice, v každé dva pytle. Víme, že dvě krabice obsahují pytle stejného typu, pouze jedna je namíchaná. Pokud jsme otevřeli jednu (náhodnou) z krabic, vyndali jeden (náhodně) z pytlů a zjistili, že se jedná o zelený čaj, s jakou pravděpodobností je druhý pytel také zelený čaj? [3 body] "Hint:" pozor na to, že pravděpodobnosti jsou změněny podmínkou pozorování pytle

Úkol 9-3: Máme n bodů na kružnici. Náhodně vybereme dvě disjunktní trojice a obě spojíme do trojúhelníků. S jakou pravděpodobností se trojúhelníky protínají? [6 bodů] Hint: výsledek nezávisí na n

Úkol 9-4: Mějme čísla $1, 2, \ldots, n$ a vezměme náhodnou permutaci na nich.

- S jakou pravděpodobností je vybraná permutace jediný cyklus? [3 body]
- Ukažte, že prvky 1 a 2 leží na stejném cyklu s pravděpodobností $1/2$. [5 bodů]

Permutaci $1, 2, \ldots, n$ chápeme jako bijekci p množiny do sebe, kde hodnota $p(i)$ je číslo na i-té pozici v permutaci. Čísla $x_1, x_2, \ldots, x_k$ tvoří cyklus pokud $f(x_1) = x_2; f(x_2) = x_3; \ldots; f(x_n) = x_1$.
Pokud "vezmeme náhodnou permutaci", myslíme tím, že každou permutaci dostaneme s pravděpodobností $1/n!$. To není totéž jako vybírat jednotlivé obrazy náhodně!

Stejně jako u předchozích počítacích příkladů, se správným přístupem není potřeba používat žádné sumy, sumy jsou nežádoucí. Všechny odpovědi jsou jednoduché výrazy, a lze (typicky) zdůvodnit jednoduchými argumenty.

Pojem pravděpodobnost si v těchto úlohách můžeme definovat jako poměr možností s danou vlastností vůči celkovému počtu možností. Předpokládáme, že každé zamíchání / každá 6-tice bodů / každá permutace mají stejnou pravděpodobnost výběru.

Domácí úkoly - 9. série

Úkol 9-1: Zamíchejme náhodně balíček (52) karet. Jaká je pravděpodobnost, že srdcové eso je v balíčku před pikovou dámou? Jaká je pravděpodobnost, že je přímo před ní (tedy nejsou mezi nimi žádné karty)? [3 body]

Úkol 9-2: Na objednávku 3 pytlů černého a 3 pytlů zeleného čaje přišly tři krabice, v každé dva pytle. Víme, že dvě krabice obsahují pytle stejného typu, pouze jedna je namíchaná. Pokud jsme otevřeli jednu (náhodnou) z krabic, vyndali jeden (náhodně) z pytlů a zjistili, že se jedná o zelený čaj, s jakou pravděpodobností je druhý pytel také zelený čaj? [3 body] "Hint:" pozor na to, že pravděpodobnosti jsou změněny podmínkou pozorování pytle

Úkol 9-3: Máme n bodů na kružnici. Náhodně vybereme dvě disjunktní trojice a obě spojíme do trojúhelníků. S jakou pravděpodobností se trojúhelníky protínají? [6 bodů] Hint: výsledek nezávisí na n

Úkol 9-4: Mějme čísla $1, 2, \dots, n$ a vezměme náhodnou permutaci na nich.

- S jakou pravděpodobností je vybraná permutace jediný cyklus? [3 body]
- Ukažte, že prvky 1 a 2 leží na stejném cyklu s pravděpodobností 1/2. [5 bodů]

Permutaci $1, 2, \dots, n$ chápeme jako bijekci p množiny do sebe, kde hodnota $p(i)$ je číslo na i-té pozici v permutaci. Čísla $x_1, x_2, \dots, x_k$ tvoří cyklus pokud $f(x_1) = x_2; f(x_2) = x_3; \dots; f(x_n) = x_1$.
Pokud "vezmeme náhodnou permutaci", myslíme tím, že každou permutaci dostaneme s pravděpodobností $1/n!$. To není totéž jako vybírat jednotlivé obrazy náhodně!

Stejně jako u předchozích počítacích příkladů, se správným přístupem není potřeba používat žádné sumy, sumy jsou nežádoucí. Všechny odpovědi jsou jednoduché výrazy, a lze (typicky) zdůvodnit jednoduchými argumenty.

Pojem pravděpodobnost si v těchto úlohách můžeme definovat jako poměr možností s danou vlastností vůči celkovému počtu možností. Předpokládáme, že každé zamíchání / každá 6-tice bodů / každá permutace mají stejnou pravděpodobnost výběru.