Příklad 1: Ukažte, že graf s lichým cyklem vždy obsahuje indukovaný lichý cyklus.

Příklad 2: Ukažte, že isomorfismus grafů je ekvivalence.

Příklad 3: Ukažte, že grafy jsou izomorfní právě když jejich doplňky jsou izomorfní.

Příklad 4: Ukažte, že každý strom na n vrcholech má nezávislou množinu velikosti alespoň $n/2$.
(Nezávislá množina je množina vrcholů neindukující žádné hrany)

Souvislost (silná, slabá)

Příklad 5: Ukažte, že doplněk nesouvislého grafu je souvislý. Kdy je doplněk nesouvislý?

Příklad 6: Ukažte, že všechny mosty grafu jsou obsaženy ve všech jeho kostrách.

Příklad 7: Jakou relaci v orientovaném grafu tvoří oboustranná dosažitelnost? Jakou relaci vzhledem ke komponentám silné souvislosti tvoří dosažitelnost?

Eulerovské grafy

Příklad 8: Dokažte, že hrany každého Eulerovského grafu lze rozložit na (hranově) disjunktní sjednocení kružnic.

Příklad 9: Ukažte, že každý souvislý neorientovaný graf lze zorientovat tak, že u všech sudých vrcholů si jsou vstupní a výstupní stupně rovny, a u lichých se liší maximálně o 1.

Rovinné grafy

Příklad 10: Ukažte, že graf je rovinný právě když jeho (podroz)dělení je rovinný graf.

Příklad 11: Dokažte, že K_5 a $K_{3,3}$ nejsou rovinné, použitím Jordanovy věty o kružnici.

Příklad 12: Dokažte, že graf lze nakreslit do plochy právě když lze nakreslit na válec a právě když lze nakreslit na sféru.

Příklad 13: Ukažte, že K_5 a $K_{3,3}$ lze nakreslit na torus.

Příklad 1: Ukažte, že graf s lichým cyklem vždy obsahuje indukovaný lichý cyklus.

Příklad 2: Ukažte, že isomorfismus grafů je ekvivalence.

Příklad 3: Ukažte, že grafy jsou izomorfní právě když jejich doplňky jsou izomorfní.

Příklad 4: Ukažte, že každý strom na n vrcholech má nezávislou množinu velikosti alespoň $n/2$.
(Nezávislá množina je množina vrcholů neindukující žádné hrany)

Souvislost (silná, slabá)

Příklad 5: Ukažte, že doplněk nesouvislého grafu je souvislý. Kdy je doplněk nesouvislý?

Příklad 6: Ukažte, že všechny mosty grafu jsou obsaženy ve všech jeho kostrách.

Příklad 7: Jakou relaci v orientovaném grafu tvoří oboustranná dosažitelnost? Jakou relaci vzhledem ke komponentám silné souvislosti tvoří dosažitelnost?

Eulerovské grafy

Příklad 8: Dokažte, že hrany každého Eulerovského grafu lze rozložit na (hranově) disjunktní sjednocení kružnic.

Příklad 9: Ukažte, že každý souvislý neorientovaný graf lze zorientovat tak, že u všech sudých vrcholů si jsou vstupní a výstupní stupně rovny, a u lichých se liší maximálně o 1.

Rovinné grafy

Příklad 10: Ukažte, že graf je rovinný právě když jeho (podroz)dělení je rovinný graf.

Příklad 11: Dokažte, že K_5 a $K_{3,3}$ nejsou rovinné, použitím Jordanovy věty o kružnici.

Příklad 12: Dokažte, že graf lze nakreslit do plochy právě když lze nakreslit na válec a právě když lze nakreslit na sféru.

Příklad 13: Ukažte, že K_5 a $K_{3,3}$ lze nakreslit na torus.

Domácí úkoly - 8. série

Graf je prostý pokud neobsahuje smyčky ani násobné hrany. V následujících úlohách uvažujeme prosté grafy (ale jejich duály prosté být nemusí).

Úkol 8-1: Dokažte, že souvislý k-regulární bipartitní graf nemůže obsahovat most. (Pozor na výjimky) [4 body] Graf je k-regulární když všechny jeho vrcholy mají stupeň právě k.

Úkol 8-2: Ukažte, že v každém souvislém grafu G na alespoň 3 vrcholech existují dva vrcholy u, v t.ž. odebrání obou najednou ($G \setminus \{u, v\}$) se souvislosti grafu zachovává. [4 bodů]

Úkol 8-3: Najděte (prostý) graf na alespoň 6 vrcholech isomorfní svému rovinnému duálu. [3 body] Za velký graf (třeba 15 vrcholů) můžete získat i bonus (pokud bude unikátní).
Protože hledáme příklad, je povoleno kreslit.

Úkol 8-4: Charakterizujte rovinné grafy jejichž duály nemají smyčky ani násobné hrany. Protože duál je definovaný vůči konkrétnímu (rovinnému) nakreslení, formálně chceme charakterizovat grafy jejichž žádné nakreslení nemá duál se zakázanými vlastnostmi (ale ve skutečnosti na volbě nakreslení nezáleží). [3 body]

Úkol 8-5: Rovinné grafy mají průměrný stupeň menší než 6, a tedy mají alespoň jeden vrchol stupně nejvýše 5. Dokažte, že v každém rovinném grafu na n vrcholech je alespoň $n/2$ vrcholů stupně nejvýše 8. O něco menší množství bodů můžete získat, pokud dokážete tvrzení pro stupeň nejvýše 9. [7 bodů]
Hint: Uvažme protipříklad, který je prostý graf s nějakým nakreslením, a má (co do inkluze) největší počet hran (proč to můžeme udělat?). V takovém grafu nemohou existovat vrcholy příliš malého stupně.
Upřesnění: Tvrzení z hintu neplatí obecně pro všechny rovinné grafy. Pro důkaz platnosti je potřeba použít předpoklad, že se jedná o protipříklad původního tvrzení.

Domácí úkoly - 8. série

Graf je prostý pokud neobsahuje smyčky ani násobné hrany. V následujících úlohách uvažujeme prosté grafy (ale jejich duály prosté být nemusí).

Úkol 8-1: Dokažte, že souvislý k-regulární bipartitní graf nemůže obsahovat most. (Pozor na výjimky) [4 body] Graf je k-regulární když všechny jeho vrcholy mají stupeň právě k.

Úkol 8-2: Ukažte, že v každém souvislém grafu G na alespoň 3 vrcholech existují dva vrcholy u, v t.ž. odebrání obou najednou ($G \setminus \{u, v\}$) se souvislosti grafu zachovává. [4 bodů]

Úkol 8-3: Najděte (prostý) graf na alespoň 6 vrcholech isomorfní svému rovinnému duálu. [3 body] Za velký graf (třeba 15 vrcholů) můžete získat i bonus (pokud bude unikátní).
Protože hledáme příklad, je povoleno kreslit.

Úkol 8-4: Charakterizujte rovinné grafy jejichž duály nemají smyčky ani násobné hrany. Protože duál je definovaný vůči konkrétnímu (rovinnému) nakreslení, formálně chceme charakterizovat grafy jejichž žádné nakreslení nemá duál se zakázanými vlastnostmi (ale ve skutečnosti na volbě nakreslení nezáleží). [3 body]

Úkol 8-5: Rovinné grafy mají průměrný stupeň menší než 6, a tedy mají alespoň jeden vrchol stupně nejvýše 5. Dokažte, že v každém rovinném grafu na n vrcholech je alespoň $n/2$ vrcholů stupně nejvýše 8. O něco menší množství bodů můžete získat, pokud dokážete tvrzení pro stupeň nejvýše 9. [7 bodů]
Hint: Uvažme protipříklad, který je prostý graf s nějakým nakreslením, a má (co do inkluze) největší počet hran (proč to můžeme udělat?). V takovém grafu nemohou existovat vrcholy příliš malého stupně.
Upřesnění: Tvrzení z hintu neplatí obecně pro všechny rovinné grafy. Pro důkaz platnosti je potřeba použít předpoklad, že se jedná o protipříklad původního tvrzení.