Příklad 1: Opravte následující skoro-ekvivalenci a najděte její třídy:

$$(\forall x, y \in \mathbb{Z}) \qquad xRy \iff x|y \wedge y|x$$

Zobrazení

Pojmy: zobrazení je prosté, na, bijekce

Příklad 2: Rozhodněte, zda pro zobrazení f a g typu $M \to M$ (tedy zobrazení množiny do sebe) platí následující. Co se stane když vezmeme (kompatibilní) zobrazení mezi obecně různými množinami?

- f, g jsou prosté $\to$ $g \circ f$ je prosté
- f, g jsou na $\to$ $g \circ f$ je na
- f je prosté a g libovolné $\to$ $g \circ f$ nebo $f \circ g$ je prosté
- f je na a g libovolné $\to$ $g \circ f$ nebo $f \circ g$ je na
- f je prosté $\iff$ f je na

Příklad 3: Najděte bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$.

Příklad 4: Najděte bijekci mezi sudými a lichými podmnožinami fixní množiny M.

Kombinatorické počítání

Příklad 5: Kolik je ve čtvercové síti $n \times n$ obdélníků?

Příklad 6: Kolik je v konvexním n-úhelníku dvojic tětiv, které se protínají?

Příklad 7: Kolika způsoby lze na mřížku 4x4 rozmístit 8 žetonů tak, aby v jednom řádku nebo jednom sloupci byly čtyři? Kolika způsoby lze žetony rozmístit aby v žádném sloupci a žádném řádku nebyly čtyři?

Příklad 8: Kolik existuje zobrazení mezi danými množinami, které jsou na?

Příklad 9: Kolik existuje podmnožin $\{1, 2, \ldots, n\}$ takových, že neobsahují žádná dvě po sobě jdoucí čísla?

Příklad 1: Opravte následující skoro-ekvivalenci a najděte její třídy:

$$(\forall x, y \in \mathbb{Z}) \qquad xRy \iff x|y \wedge y|x$$

Zobrazení

Pojmy: zobrazení je prosté, na, bijekce

Příklad 2: Rozhodněte, zda pro zobrazení f a g typu $M \to M$ (tedy zobrazení množiny do sebe) platí následující. Co se stane když vezmeme (kompatibilní) zobrazení mezi obecně různými množinami?

- f, g jsou prosté $\to$ $g \circ f$ je prosté
- f, g jsou na $\to$ $g \circ f$ je na
- f je prosté a g libovolné $\to$ $g \circ f$ nebo $f \circ g$ je prosté
- f je na a g libovolné $\to$ $g \circ f$ nebo $f \circ g$ je na
- f je prosté $\iff$ f je na

Příklad 3: Najděte bijekci mezi $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$.

Příklad 4: Najděte bijekci mezi sudými a lichými podmnožinami fixní množiny M.

Kombinatorické počítání

Příklad 5: Kolik je ve čtvercové síti $n \times n$ obdélníků?

Příklad 6: Kolik je v konvexním n-úhelníku dvojic tětiv, které se protínají?

Příklad 7: Kolika způsoby lze na mřížku 4x4 rozmístit 8 žetonů tak, aby v jednom řádku nebo jednom sloupci byly čtyři? Kolika způsoby lze žetony rozmístit aby v žádném sloupci a žádném řádku nebyly čtyři?

Příklad 8: Kolik existuje zobrazení mezi danými množinami, které jsou na?

Příklad 9: Kolik existuje podmnožin $\{1, 2, \ldots, n\}$ takových, že neobsahují žádná dvě po sobě jdoucí čísla?

Domácí úkoly - 5. série

Úkol 5-1: Mějme množinu $X = \{1, \ldots, n\}$. Kolika způsoby lze vybrat dvě podmnožiny $A, B \subseteq X$ tak aby $A \subseteq B$? [3 body]

Úkol 5-2: Kolika způsoby může figurka na šachovnici $n \times n$ přejít z levého dolního rohu do pravého horního, pokud se může pohybovat pouze nahoru a doprava? Výsledkem bude jednoduchý výraz (bez sum). Označme si tento výraz jako P_n [2 body]

Úkol 5-3: Předpokládejme znalost P_n (pro obecné n) z předchozí úlohy. Mějme šachovnici s dvěma dírami na diagonále. Pro jednoduchost si zafixujme konkrétní čísla. Máme šachovnici 13×13, s dírami na pozicích $(5, 5)$ a $(8, 8)$. Kolika způsoby může projít figurka z pozice $(1, 1)$ do pozice $(13, 13)$ tak aby se vyhnula dírám? Opět jsou povolené pouze tahy zvyšující jednu nebo druhou souřadnici o 1. [5 bodů]

Úkol 5-4: Standardní balíček má 52 karet, 13 od každé ze 4 barev. V následujících úlohách nás zajímá počet variací (různých výběrů/rozdání), tedy nás nezajímá konkrétní pořadí karet.

a) Kolika způsoby lze rozdat všechny karty mezi 4 hráče (každému 13)? [3 body]

b) Kolika způsoby lze z balíčku vybrat 13 karet tak, aby výběr obsahoval karty všech 4 barev? [5 bodů]

c) Kolika způsoby můžeme rozdat karty jako v a), tak aby navíc první hráč měl alespoň jednu kartu od každé barvy, jako v b)? [2 body]

[10 bodů]

U úloh nás zajímá hlavně **způsob odvození** výsledku a jeho **zdůvodnění**. Všechny výsledky chceme jako jednuché výrazy (sčítání/násobení pár kombinačních čísel), nechceme žádné sumy. Výsledky úloh s konkrétními čísly není třeba dopočítávat do explicitního čísla (to už zvládne kalkulačka), kombinační jsou dostatečně konkrétní.
Hint pro úlohy: V domácím úkolu se hodí velmi používat základní princip, který znáte z přednášky.

Domácí úkoly - 5. série

Úkol 5-1: Mějme množinu $X = \{1, \ldots, n\}$. Kolika způsoby lze vybrat dvě podmnožiny $A, B \subseteq X$ tak aby $A \subseteq B$? [3 body]

Úkol 5-2: Kolika způsoby může figurka na šachovnici $n \times n$ přejít z levého dolního rohu do pravého horního, pokud se může pohybovat pouze nahoru a doprava? Výsledkem bude jednoduchý výraz (bez sum). Označme si tento výraz jako P_n [2 body]

Úkol 5-3: Předpokládejme znalost P_n (pro obecné n) z předchozí úlohy. Mějme šachovnici s dvěma dírami na diagonále. Pro jednoduchost si zafixujme konkrétní čísla. Máme šachovnici 13×13, s dírami na pozicích $(5, 5)$ a $(8, 8)$. Kolika způsoby může projít figurka z pozice $(1, 1)$ do pozice $(13, 13)$ tak aby se vyhnula dírám? Opět jsou povolené pouze tahy zvyšující jednu nebo druhou souřadnici o 1. [5 bodů]

Úkol 5-4: Standardní balíček má 52 karet, 13 od každé ze 4 barev. V následujících úlohách nás zajímá počet variací (různých výběrů/rozdání), tedy nás nezajímá konkrétní pořadí karet.

a) Kolika způsoby lze rozdat všechny karty mezi 4 hráče (každému 13)? [3 body]

b) Kolika způsoby lze z balíčku vybrat 13 karet tak, aby výběr obsahoval karty všech 4 barev? [5 bodů]

c) Kolika způsoby můžeme rozdat karty jako v a), tak aby navíc první hráč měl alespoň jednu kartu od každé barvy, jako v b)? [2 body]

[10 bodů]

U úloh nás zajímá hlavně **způsob odvození** výsledku a jeho **zdůvodnění**. Všechny výsledky chceme jako jednuché výrazy (sčítání/násobení pár kombinačních čísel), nechceme žádné sumy. Výsledky úloh s konkrétními čísly není třeba dopočítávat do explicitního čísla (to už zvládne kalkulačka), kombinační jsou dostatečně konkrétní.
Hint pro úlohy: V domácím úkolu se hodí velmi používat základní princip, který znáte z přednášky.