Příklad 1: Nechť $A, X_1, \ldots, X_n$ jsou libovolné množiny. Dokažte de Morganovy zákony.

$$A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} (A \setminus X_i) \qquad A \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \setminus X_i)$$

Příklad 2: Určete, čemu se rovnají následující výrazy a dokažte rovnost

$$\overline{(A \cap B)} \cap (A \cup B)$$

$$((A \cup B) \cap \overline{C}) \cup ((B \cup C) \cap \overline{A}) \cup ((A \cup C) \cap \overline{B})$$

$$2^A \cap A \qquad \overline{2^A}$$

Příklad 3: Charakterizujte vlastnosti relace σ na $\mathbb{N}$ (ref.,sym.,ant.,tr.)
$x \sigma y \Leftrightarrow x, y$ jsou nesoudělná

Příklad 4: Dokažte či vyvraťte uzavřenost reflexivity, symetrie a transitivity na operace průniku, sjednocení, rozdílu, symetrické diference a skládání relací.

Příklad 5: Charakterizujte vlastnosti následujících relací σ na 2^A kde $A \neq \emptyset$

- $X \sigma Y \Leftrightarrow X \cup Y = A$
- $X \sigma Y \Leftrightarrow X \cap Y = \emptyset$
- $X \sigma Y \Leftrightarrow X = A$ nebo $Y = \emptyset$
- $X \sigma Y \Leftrightarrow |X| = |Y|$

Příklad 1: Nechť $A, X_1, \ldots, X_n$ jsou libovolné množiny. Dokažte de Morganovy zákony.

$$A \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} (A \backslash X_i) \qquad A \backslash \left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \backslash X_i)$$

Příklad 2: Určete, čemu se rovnají následující výrazy a dokažte rovnost

$$\overline{(A \cap B)} \cap (A \cup B)$$

$$((A \cup B) \cap \overline{C}) \cup ((B \cup C) \cap \overline{A}) \cup ((A \cup C) \cap \overline{B})$$

$$2^A \cap A \qquad \overline{2^A}$$

Příklad 3: Charakterizujte vlastnosti relace σ na $\mathbb{N}$ (ref.,sym.,ant.,tr.)
$x \sigma y \Leftrightarrow x, y$ jsou nesoudělná

Příklad 4: Dokažte či vyvraťte uzavřenost reflexivity, symetrie a transitivity na operace průniku, sjednocení, rozdílu, symetrické diference a skládání relací.

Příklad 5: Charakterizujte vlastnosti následujících relací σ na 2^A kde $A \neq \emptyset$

- $X \sigma Y \Leftrightarrow X \cup Y = A$
- $X \sigma Y \Leftrightarrow X \cap Y = \emptyset$
- $X \sigma Y \Leftrightarrow X = A$ nebo $Y = \emptyset$
- $X \sigma Y \Leftrightarrow |X| = |Y|$

Domácí úkoly - 3. série

Úkol 3-1: Najděte všechny relace, které jsou zároveň zároveň ekvivalence i uspořádání, a dokažte že žádné jiné neexistují. [3 body]

Úkol 3-2: Ukažte, že pro reflexivní relaci R platí, že R je transitivní právě když $R \circ R = R$. [7 bodů]
Platí toto i pro nereflexivní relace? [1 bod]

Úkol 3-3: Ukažte, že relace R je reflexivní právě když pro všechny relace S (nad stejnou množinou) platí $S \subseteq R \circ S$ [4 body]

Pozn: Skládání relací
Pro dvě relace R, S (nad stejnou množinou X) definujeme složenou relaci

$$R \circ S = \{(x,z) | (\exists y \in X)(xRy \wedge ySz)\}$$

Neboli

$$x(R \circ S)y \iff (\exists y \in X)(xRy \wedge ySz)$$

Domácí úkoly - 3. série

Úkol 3-1: Najděte všechny relace, které jsou zároveň zároveň ekvivalence i uspořádání, a dokažte že žádné jiné neexistují. [3 body]

Úkol 3-2: Ukažte, že pro reflexivní relaci R platí, že R je transitivní právě když $R \circ R = R$. [7 bodů]
Platí toto i pro nereflexivní relace? [1 bod]

Úkol 3-3: Ukažte, že relace R je reflexivní právě když pro všechny relace S (nad stejnou množinou) platí $S \subseteq R \circ S$ [4 body]

Pozn: Skládání relací
Pro dvě relace R, S (nad stejnou množinou X) definujeme složenou relaci

$$R \circ S = \{(x,z) | (\exists y \in X)(xRy \wedge ySz)\}$$

Neboli

$$x(R \circ S)y \iff (\exists y \in X)(xRy \wedge ySz)$$