**Příklad 1:** Dokažte, že pro každé přirozené $k$ platí:

- $2^{2k} \equiv 1 \pmod 3$
- $\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$
- $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k^2+k}{2}$

**Příklad 2:** Nechť $A, B, C, X_1, \ldots, X_n$ jsou libovolné množiny. Dokažte zákony množinové distributivity.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap X_i) \qquad A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} (A \cup X_i)$$

**Příklad 3:** Nechť $A, X_1, \ldots, X_n$ jsou libovolné množiny. Dokažte de Morganovy zákony.

$$A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} (A \setminus X_i) \qquad A \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \setminus X_i)$$

**Definice:** Pro libovolnou množinu $M$ označme $2^M$ množinu všech podmnožin $M$ nazývanou *potenční množina* $M$

**Příklad 4:** Jak vypadají potenční množiny následujících množin

$$\{a, b, c\} \qquad \{1, \{x, y\}, \{z\}\} \qquad \emptyset$$

**Příklad 5:** Dokažte, že $M = N$ právě když $2^M = 2^N$.

**Definice:** Pro množinu prvků $A$ z nějakého univerza $U$ definujeme $\overline{A}$ jako *komplement* množiny $A$, tedy $\overline{A} := U \setminus A$. Komplement **vždy** uvažujeme vzhledem k nějakému (implicitnímu) univerzum!

**Příklad 6:** Určete, čemu se rovnají následující výrazy a dokažte rovnost

$$\overline{(A \cap B)} \cap (A \cup B)$$

$$((A \cup B) \cap \overline{C}) \cup ((B \cup C) \cap \overline{A}) \cup ((A \cup C) \cap \overline{B})$$

$$2^A \cap A \qquad \overline{2^A}$$

**Příklad 1:** Dokažte, že pro každé přirozené $k$ platí:

- $2^{2k} \equiv 1 \pmod 3$
- $\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$
- $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k^2+k}{2}$

**Příklad 2:** Nechť $A, B, C, X_1, \ldots, X_n$ jsou libovolné množiny. Dokažte zákony množinové distributivity.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap \left( \bigcup_{i=1}^{n} X_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap X_i) \qquad A \cup \left( \bigcap_{i=1}^{n} X_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} (A \cup X_i)$$

**Příklad 3:** Nechť $A, X_1, \ldots, X_n$ jsou libovolné množiny. Dokažte de Morganovy zákony.

$$A \backslash \left( \bigcup_{i=1}^{n} X_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} (A \backslash X_i) \qquad A \backslash \left( \bigcap_{i=1}^{n} X_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \backslash X_i)$$

**Definice:** Pro libovolnou množinu $M$ označme $2^M$ množinu všech podmnožin $M$ nazývanou *potenční množina* $M$

**Příklad 4:** Jak vypadají potenční množiny následujících množin

$$\{a, b, c\} \qquad \{1, \{x, y\}, \{z\}\} \qquad \emptyset$$

**Příklad 5:** Dokažte, že $M = N$ právě když $2^M = 2^N$.

**Definice:** Pro množinu prvků $A$ z nějakého univerza $U$ definujeme $\overline{A}$ jako *komplement* množiny $A$, tedy $\overline{A} := U \backslash A$. Komplement **vždy** uvažujeme vzhledem k nějakému (implicitnímu) univerzum!

**Příklad 6:** Určete, čemu se rovnají následující výrazy a dokažte rovnost

$$\overline{(A \cap B)} \cap (A \cup B)$$

$$((A \cup B) \cap \overline{C}) \cup ((B \cup C) \cap \overline{A}) \cup ((A \cup C) \cap \overline{B})$$

$$2^A \cap A \qquad \overline{2^A}$$

**Domácí úkoly - 2. série**

**Úkol 2-1:** Uvažujme nějaké univerzum (třeba $\mathbb{N}$) a jeho podmnožiny $A, B$. Zjednodušte následující výrazy (a dokažte rovnost).

- $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$
- $A \cup (B \cap \emptyset)$
- $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$
- $2^{\{A,B\}}$

[7 bodů]

**Úkol 2-2:** Pro libovolnou konečnou množinu $M$ velikosti $n$ určete, kolik má podmnožin liché a sudé velikosti. [6 body]

**Úkol 2-3:** Pro dvě množiny $A$ a $B$ určete počet různých podmnožin jejich kartézského součinu $A \times B$. [2 body]

**Domácí úkoly - 2. série**

**Úkol 2-1:** Uvažujme nějaké univerzum (třeba $\mathbb{N}$) a jeho podmnožiny $A, B$. Zjednodušte následující výrazy (a dokažte rovnost).

- $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$
- $A \cup (B \cap \emptyset)$
- $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$
- $2^{\{A,B\}}$

[7 bodů]

**Úkol 2-2:** Pro libovolnou konečnou množinu $M$ velikosti $n$ určete, kolik má podmnožin liché a sudé velikosti. [6 body]

**Úkol 2-3:** Pro dvě množiny $A$ a $B$ určete počet různých podmnožin jejich kartézského součinu $A \times B$. [2 body]