Indukce a motivační příklady

Příklad 1: Chceme na rovnoramenných vahách umět navážit všechny hmotnosti od 1g do 100g. Kolik nejméně závaží potřebujeme?

Příklad 2: Máme M mincí z nichž jedna je falešná, což se pozná tak, že má jinou váhu než ostatní. Pomocí několika vážení na rovnoramenných vahách ji chceme najít.

- Dokažte, že na $\lceil log_3 M \rceil$ vážení umíme falešnou minci najít pokud víme, že je lehčí.
- Ukažte, že pokud máme 12 mincí, ale nevíme zda je falešná mince lehčí nebo těžší, umíme ji najít na 3 vážení.
- Pro kolik mincí lze dokázat, že 3 vážení nestačí?

Příklad 3: Máme večírek na kterém je alespoň 5 hostů. Některé dvojice hostů se znají a některé se neznají. Dokažte, že na večírku jsou tři lidé kteří se navzájem všichni znají nebo vůbec neznají.

Příklad 4: Chceme dláždit plochu rozměrů $2^k \times 2^k$ pomocí dlaždic ve tvaru "L" pokrývajících tři jednotkové čtverce. Dokažte, že není možné takovou plochu vydláždit. Dokažte, že pokud zvolíme libovolný jednotkový čtverec v ploše, dokážeme vydláždit celou plochu s vynecháním právě tohoto čtverce.

Příklad 5: V dokonale kruhovém rybníčku plave kačenka s poraněnou plovací blánou. Kvůli poranění nemůže vzlétnout z hladiny, musí nejprve vylézt na břeh. Na břehu ale číhá geniální kocour, který se pohybuje čtyřnásobnou rychlostí než kačenka. Existuje způsob jak může kačenka odlétnout ať se kocour chová jakkoliv chytře?

Příklad 6: Mějme hru na odabírání sirek. Začíná se s n sirkami. Hráči se střídají a každý vždy odebere určitý počet zápalek. Hráč, který odebere poslední zápalku prohrává. Za jakých podmínek si může začínající hráč zajistit výhru, pokud hráči mají povoleno odebírat následující kombinace počtů zápalek:

- 1,2,3
- 1,2,4
- 1,2,4,0

Indukce a motivační příklady

Příklad 1: Chceme na rovnoramenných vahách umět navážit všechny hmotnosti od 1g do 100g. Kolik nejméně závaží potřebujeme?

Příklad 2: Máme M mincí z nichž jedna je falešná, což se pozná tak, že má jinou váhu než ostatní. Pomocí několika vážení na rovnoramenných vahách ji chceme najít.

- Dokažte, že na $\lceil log_3 M \rceil$ vážení umíme falešnou minci najít pokud víme, že je lehčí.
- Ukažte, že pokud máme 12 mincí, ale nevíme zda je falešná mince lehčí nebo těžší, umíme ji najít na 3 vážení.
- Pro kolik mincí lze dokázat, že 3 vážení nestačí?

Příklad 3: Máme večírek na kterém je alespoň 5 hostů. Některé dvojice hostů se znají a některé se neznají. Dokažte, že na večírku jsou tři lidé kteří se navzájem všichni znají nebo vůbec neznají.

Příklad 4: Chceme dláždit plochu rozměrů $2^k \times 2^k$ pomocí dlaždic ve tvaru "L" pokrývajících tři jednotkové čtverce. Dokažte, že není možné takovou plochu vydláždit. Dokažte, že pokud zvolíme libovolný jednotkový čtverec v ploše, dokážeme vydláždit celou plochu s vynecháním právě tohoto čtverce.

Příklad 5: V dokonale kruhovém rybníčku plave kačenka s poraněnou plovací blánou. Kvůli poranění nemůže vzlétnout z hladiny, musí nejprve vylézt na břeh. Na břehu ale číhá geniální kocour, který se pohybuje čtyřnásobnou rychlostí než kačenka. Existuje způsob jak může kačenka odlétnout ať se kocour chová jakkoliv chytře?

Příklad 6: Mějme hru na odabírání sirek. Začíná se s n sirkami. Hráči se střídají a každý vždy odebere určitý počet zápalek. Hráč, který odebere poslední zápalku prohrává. Za jakých podmínek si může začínající hráč zajistit výhru, pokud hráči mají povoleno odebírat následující kombinace počtů zápalek:

- 1,2,3
- 1,2,4
- 1,2,4,0

Domácí úkoly - 1. série

Úkol 1-1: Vyřeště stejný problém jako v příkladu 6 pokud oba hráči mohou odebírat následující počty sirek. Rozhodněte, které počty sirek jsou vítězné, které proherní pozice a dokažte.

a) 1 nebo 4 zápalky [4 body]

b) jakoukoliv mocninu čísla 2 [4 body]

c) jakoukoliv mocninu čísla 3 [2 body]

Pozn.:

- uvažujeme pouze mocniny s nezáporným celočíselným exponentem
- $2^0 = 1$ je platná mocnina 2

Úkol 1-2: Mějme množinu M_n všech čísel, která lze zapsat jako

$$M_n = \{\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots \pm (n-1) \pm n\}$$

(tedy prvky jsou právě čísla zíkaná nahrazením každého $\pm$ za $+$ nebo $-$ nezávisle na ostatních).
Rozhodněte jaká čísla obsahuje M_n a dokažte (pro obecné n) [10 bodů]

Úkol 1-3: Zvolte si přezdívku pro zobrazení na webu.
[Achievement: Přezdívka zvolena]

Domácí úkoly - 1. série

Úkol 1-1: Vyřeště stejný problém jako v příkladu 6 pokud oba hráči mohou odebírat následující počty sirek. Rozhodněte, které počty sirek jsou vítězné, které proherní pozice a dokažte.

a) 1 nebo 4 zápalky [4 body]

b) jakoukoliv mocninu čísla 2 [4 body]

c) jakoukoliv mocninu čísla 3 [2 body]

Pozn.:

- uvažujeme pouze mocniny s nezáporným celočíselným exponentem
- $2^0 = 1$ je platná mocnina 2

Úkol 1-2: Mějme množinu M_n všech čísel, která lze zapsat jako

$$M_n = \{\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots \pm (n-1) \pm n\}$$

(tedy prvky jsou právě čísla získaná nahrazením každého $\pm$ za $+$ nebo $-$ nezávisle na ostatních).
Rozhodněte jaká čísla obsahuje M_n a dokažte (pro obecné n) [10 bodů]

Úkol 1-3: Zvolte si přezdívku pro zobrazení na webu.
[Achievement: Přezdívka zvolena]