Příklad 1: Policejní stanice vidí na mapě několik událostí, ke kterým je potřeba poslat hlídky do 5 minut, a aktuální rozmístění hlídek. Navrhněte jak určit, která hlídka má vyrazit ke které události tak, aby se maximalizoval počet ošetřených událostí.

Příklad 2: Máme množinu dolů a továren. Každý důl produkuje jinou surovinu, a je třeba investovat do jeho spuštění. Každá továrna má seznam surovin, které potřebuje ke svému běhu, a profit, který získáme jejím rozběhnutím. Navrhněte jak najít nejvýnosnější kombinaci dolů k investici.

Příklad 3: Na vstupu máme obdélníkovou matici desetinných čísel. Navrhněte algoritmus, který všechny prvky zaokrouhlí (každý buď nahoru nebo dolu) tak, aby součty všech sloupců a řádků byly stejné jako původní zaokrouhlené na nejbližší celočíselnou hodnotu.

Příklad 4: Zkusme si pokročilé odhady na počet iterací Dinicijova algoritmu pro jednotkové kapacity. Jako myšlenkový experiment zastavíme Dinicije po nějaké fázi a vyjdeme ze dvou základních myšlenek:

- Počet zbývajících fází je nejvýše rozdíl aktuálního a maximálního toku.
- Řez ve vrstevnaté síti (třeba mezi dvěma vrstvami, tzv. rozhraní) dává omezení na to o kolik lze ještě aktuální tok zlepšit.
- Po k fázích máme alespoň $k+1$ vrstev (a tedy k rozhraní)

Uvažme různé způsoby jak odhadnout velikost nejmenšího rozhraní

- Odhad 1: najdeme rozhraní s nejmenším počtem hran
- Odhad 2: najdeme rozhraní mezi vrstavmi s nejmenším součtem počtu vrcholů

Pomocí vhodné volby k ukažte, že se složitost Dinicijova algoritmu dá odhadnout jako $O(m^{3/2})$ resp. $O(n^{2/3}m)$

Příklad 5: Ukažme si, že problém toku více komodit nelze redukovat na jednoduchý tokový problém. Najděte síť s k zdroji (produkujícími jednu jednotku) a k spotřebiči, kde pokud nerozlišujeme zdroje, umíme dopravit k jednotek, ale pokud chceme dopravovat do konkrétních spotřebičů, je možné dopravit pouze jednu jednotku.

Hint: předpokládejme nejprve, že toky různých komodit se nemohou křížit.

Příklad 1: Policejní stanice vidí na mapě několik událostí, ke kterým je potřeba poslat hlídky do 5 minut, a aktuální rozmístění hlídek. Navrhněte jak určit, která hlídka má vyrazit ke které události tak, aby se maximalizoval počet ošetřených událostí.

Příklad 2: Máme množinu dolů a továren. Každý důl produkuje jinou surovinu, a je třeba investovat do jeho spuštění. Každá továrna má seznam surovin, které potřebuje ke svému běhu, a profit, který získáme jejím rozběhnutím. Navrhněte jak najít nejvýnosnější kombinaci dolů k investici.

Příklad 3: Na vstupu máme obdélníkovou matici desetinných čísel. Navrhněte algoritmus, který všechny prvky zaokrouhlí (každý buď nahoru nebo dolu) tak, aby součty všech sloupců a řádků byly stejné jako původní zaokrouhlené na nejbližší celočíselnou hodnotu.

Příklad 4: Zkusme si pokročilé odhady na počet iterací Dinicijova algoritmu pro jednotkové kapacity. Jako myšlenkový experiment zastavíme Dinicije po nějaké fázi a vyjdeme ze dvou základních myšlenek:

- Počet zbývajících fází je nejvýše rozdíl aktuálního a maximálního toku.
- Řez ve vrstevnaté síti (třeba mezi dvěma vrstvami, tzv. rozhraní) dává omezení na to o kolik lze ještě aktuální tok zlepšit.
- Po k fázích máme alespoň $k+1$ vrstev (a tedy k rozhraní)

Uvažme různé způsoby jak odhadnout velikost nejmenšího rozhraní

- Odhad 1: najdeme rozhraní s nejmenším počtem hran
- Odhad 2: najdeme rozhraní mezi vrstavmi s nejmenším součtem počtu vrcholů

Pomocí vhodné volby k ukažte, že se složitost Dinicijova algoritmu dá odhadnout jako $O(m^{3/2})$ resp. $O(n^{2/3}m)$

Příklad 5: Ukažme si, že problém toku více komodit nelze redukovat na jednoduchý tokový problém. Najděte síť s k zdroji (produkujícími jednu jednotku) a k spotřebiči, kde pokud nerozlišujeme zdroje, umíme dopravit k jednotek, ale pokud chceme dopravovat do konkrétních spotřebičů, je možné dopravit pouze jednu jednotku.

Hint: předpokládejme nejprve, že toky různých komodit se nemohou křížit.

Úkol 3 - Goldberg

Ukažte, že pokud máme na vstupu graf s celočíselnými kapacitami omezenými konstantou $k = \mathcal{O}(1)$ poběží Goldbergův algoritmus v čase $\mathcal{O}(nm)$ (bez úprav algoritmu).

Využijte důkazu, který už znáte z přednášky (nebo z průvodce, kapitola 14.5), a popište zlepšení, která lze v důkazu získat pomocí předpokladu omezenosti kapacit.

Hint: Pro hlavní myšlenku stačí zlepšit pouze jednu část, není třeba vynalézat komplikované postupy. Aby ale všechno technicky sedělo, je třeba si dát pozor na technikálie, a udělat trochu lépe ještě část, která se v normální analýze zametá pod koberec.

Úkol 3 - Goldberg

Ukažte, že pokud máme na vstupu graf s celočíselnými kapacitami omezenými konstantou $k = \mathcal{O}(1)$ poběží Goldbergův algoritmus v čase $\mathcal{O}(nm)$ (bez úprav algoritmu).

Využijte důkazu, který už znáte z přednášky (nebo z průvodce, kapitola 14.5), a popište zlepšení, která lze v důkazu získat pomocí předpokladu omezenosti kapacit.

Hint: Pro hlavní myšlenku stačí zlepšit pouze jednu část, není třeba vynalézat komplikované postupy. Aby ale všechno technicky sedělo, je třeba si dát pozor na technikálie, a udělat trochu lépe ještě část, která se v normální analýze zametá pod koberec.