

Dinicův algoritmus, a analýza sítí získaných z redukcí

Příklad 1: Předpokládejme, v síti jsou pouze kapacity 0/1, a každý vrchol v síti má buď pouze jednu vstupní nebo pouze jednu výstupní hranu.

- Ukažte, že druhá vlastnost se zachovává i ve vrstevnatých sítích.
- Ukažte, že hledání blokujícího toku trvá $\mathcal{O}(n + m)$ (Hint: normálně se každou zlepšující cestou eliminuje alespoň jedna hrana, díky druhé vlastnosti se eliminují rovnou celé vrcholy).

Příklad 2: Dokažte následující pozorování o Dinicově algoritmu:

- Po každé fázi (hledání blokujícího toku) lze počet následujících fází shora odhadnout rozdílem velikostí aktuálního toku a maximálního toku.
- Po zkonstruování vrstevnaté sítě, vezměme libovolný řez tvořený tzv. rozhraním mezi dvěma vrstvami. Ukažte, že jeho velikost lze shora odhadnout rozdílem velikostí aktuálního toku a maximálního toku.
- Ukažte, že v síti s 0/1-kapacitami, po k fázích existuje ve vrstevnaté síti rozhraní velikosti nejvýše $\mathcal{O}(m/k)$
- Vyvoďte, že fáze proběhne nejvýše $\mathcal{O}(\sqrt{m})$

(viz. Krajinou grafových algoritmů, kapitola 2 - Dinicův algoritmus)

Toky

Příklad 3: Na vstupu máme obdélníkovou matici desetinných čísel. Navrhněte algoritmus, který všechny prvky zaokrouhlí (každý buď nahoru nebo dolů) tak, aby součty všech sloupců a řádků byly stejné jako původní součty zaokrouhlené na nejbližší celočíselnou hodnotu.

Rozmyslete, že můžeme úlohu redukovat na případ, kdy všechna čísla v tabulce jsou z rozmezí $(0, 1)$.

Rozmyslete, jak vypadají zlepšující cesty v tokové úloze. Popište řešení úlohy jako algoritmus pracující přímo s tabulkou (bez mezikroku vytváření tokové sítě).

Příklad 4: Ukažte nereducovatelnost problému toku více komodit. Najděte síť s k zdroji a spotřebiči t.ž. pokud každý produkuje/spotřebovává maximálně jednu jednotku, lze bez rozlišování komodit přepravit k jednotek, ale pokud specifikujeme, který zdroj má plnit který spotřebič, lze přepravit mnohem méně (1 jednotka). Hint: předpokládejte nejprve, že se toky nemohou křížit ve vrcholech, pak sestrojte síť z vrcholů stupně 3.