Divide & Conquer

Příklad 1: Vyřešte asymptoticky následující rekurence:
(zkuste vyřešit přístupem Master theoremu bez použití jeho plné síly)

- $T(n) = 2 * T(n/2) + \Theta(n)$
- $T(n) = 3 * T(n/2) + \Theta(n^2)$ vs. $T(n) = 3 * T(n/2) + \Theta(n)$
- $T(n) = T(n/5) + T(\frac{7}{10}n) + \Theta(n)$
- $T(n) = \sum_{i=1}^{k} T(a_i n) + \Theta(n)$ t.ž. $(\forall i)(a_i \geq 0)$ & $\sum_{i=1}^{k} a_i = 1$

Příklad 2: Použijte metodu $D\&C$ k návrhu algoritmu na inverz dolní (nebo horní) trojúhelníkové matice. Pro dělení problému využijeme blokové schéma násobení matic.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{bmatrix}$$

Pozorování: V algoritmu nikde nepotřebujeme inverzi matice. To není náhoda, ale obecná vlastnost $D\&C$ přístupu. Třeba merge-sort také pouze slévá ale nikdy explicitně netřídí. Pomocí $D\&C$ můžeme často vyřešit problémy, které řešit neumíme, navíc efektivně.

Příklad 3: Použijte metodu $D\&C$ k návrhu algoritmu na nalezení dvojice nejbližších bodů ze seznamu 2D souřadnic na vstupu.

Jaký je plán útoku? Body seřazené dle x lze snadno rozdělit vertikální hranicí na dva stejně velké podproblémy. Pokud všechny dvojice bodů na obou stranách hranice mají vzdálenosti $\geq k$, v každém čtverci $k * k$ je nejvýše konstantně bodů. Seřaďme body poblíž hranice dle y. Potom lze všechny dvojice napříč hranicí zkontrolovat v lineárím čase, paralelním průchodem obou seznamů.

Analyzujte časovou složitost. Jak dosáhnout složitosti $\mathcal{O}(n \log n)$?

Dynamické algoritmy:

Příklad 4: V matici 0/1-čkové matici velikosti $n \times n$ na vstupu najděte největší čtvercovou nulovou podmatici.

Domácí úkol 8 - Rozděl a Zápočtuj

Vyřešte jednu z následujících úloh:

Po domluvě bude možné vyřešit obě úlohy za získání o něco více než 1 bodu pro ty, kteří budou mít problém dosáhnout na zápočet.

Master of Recursion

Vyřešte následující rekurentní vztahy. Pro řešení využijte buď vlastní aplikaci myšlenek Master Theoremu, nebo silnější verze Master Theoremu, které je možné nalézt online. Řešení stručně okomentujte, tedy zdůvodněte či uveďte na základě jakého zdroje jste řešili (teoretického zdroje, vygooglit si potřebnou teorii je přínosné, nechat si rekurzi vyřešit řešičem už není).

- $T(n) = 5T(n/2) + \Theta(n^2)$
- $T(n) = 2T(n/2) + 4T(n/3) + \Theta(n^2)$
- $T(n) = 8T(n/2) + \Theta(\frac{n^3}{\log n})$
- $T(n) = \sqrt{n} \cdot T(\sqrt{n}) + \Theta(n)$

Diagonální dynamika

Mějme na vstupu matici A celých čísel $n \times n$. Úkolem je najít čtvercovou podmatici na hlavní diagonále t.ž. má ze všech takových čtvercových matic maximální součet. Tedy hledáme indexy i, j, t.ž. podmatice indexů $[i, \ldots, j] \times [i, \ldots, j]$ maximalizuje součet.

K řešení úlohy využijte dynamické programování, chceme dosáhnout lineárního času (tedy $\mathcal{O}(n^2)$ - lineární k velikosti vstupu). Nezapomeňte na důkaz korektnosti.