Amortizace

Příklad 1: Rostoucí pole: Mějme (neuspořádané) pole s operací Insert, která vytvoří dvojnásobně větší pole pokud již není na prvek místo. Najděte vhodnou potenciálovou funkci a ukažte, že amort. složitost Insert je $\mathcal{O}_a(1)$.

Příklad 2: Multipop zásobník: Mějme zásobník implementovaný jako spojový seznam, s operacemi Insert, Pop a Multipop(k), který odstraní k prvků a vrátí poslední. Najděte vhodnou potenciálovou funkci a ukažte, že amort. složitost všech operací je $\mathcal{O}_a(1)$.

Příklad 3: Líné vyvažování: (kapitola 9.4. v Průvodci) Definujme BVS, kde si v každém vrcholu udržujeme počet prvků v podstromě. Vrchol je vyvážený, pokud oba podstromy obsahují maximálně $2/3$ celkového počtu prvků. Pokud je tato podmínka (při Insert či Delete) porušena, najdeme nejvyšší uzel ve kterém neplatí, a celý jeho podstrom perfektně vyvážíme přebudováním.

Definujme potenciál vrcholu jako (absolutní) rozdíl ve velikostech podstromů (nebo 0 pokud je rozdíl ≤ 1), potenciál stromu je součet potenciálů vrcholů

Ukažte, že hloubka stromu je $\mathcal{O}(\log n)$. Ukažte, že amortizovaná složitost operací Insert a Delete (s vyvažováním) je $\mathcal{O}_a(\log n)$. (+) Proč musíme mít potenciál vrcholu 0 pro rozdíl velikostí podstromů 1?

Hešování / Hashování

Systém $\mathcal{H}$ hešovacách funkcí $\mathcal{U} \to [m]$ je c-univerzální ($c \geq 1$) $\Leftrightarrow$

$$(\forall x \neq y \in \mathcal{U}) Pr_{h \in \mathcal{H}}[h(x) = h(y)] \leq c/m$$

Příklad 4: Hešujme n prvků pomocí c-univerzálního systému do $[m]$. Jaká je střední hodnota počtu kolizí pro $m = \theta(n^2)$ a $m = \theta(n)$? (poznamenejme, že kolize mezi prvky jsou velmi závislé jevy) Klíčový point: co nám to říká o pravděpodobnosti, že k prvků bude mít stejný heš (skončí ve stejné přihrádce)?

Příklad 5: Předpokládejme, že náhodně zvolená hešovací funkce $h : \mathcal{U} \to 2^m$ se chová náhodně. Chápejme heš jako binární číslo s nezávislými bity. Pokud zahešujeme n prvků, určete následující pravděpodobnosti:

- Fixní prvek má heš začínající alespoň k nulovými bity.
- Existuje prvek s hešem začínajícím alespoň k nulovými bity (horní odhad, union-bound)
- Všem prvkům začínají heše nejvýše k nulovými bity (horní odhad, z nezávislosti)
- Zafixujme $m = 2^x$. Definujme $\bar{x}$ jako největší počet počátečních nul všech hešů. Určete pravděpodovnost, že $|\bar{x} - x| \leq 1$ a že $\bar{x} = x$

Příklad 6: Máme stream M prvků (nelze číst opakovaně). Chceme spočítat počet různých prvků m ve streamu.

Navrhněte přesné řešení. Navrhněte přibližné řešení pokud dostupná paměť je mnohem menší než m. Určete časovou a prostorovou složitost.