

Proseminář z lineární algebry

přednáška 12

Podobnost a diagonalizace

Podobnost

$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou podobné, pokud existuje $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární taková, že $A = SBS^{-1}$
podobnost je ekvivalence na maticích $\mathbb{R}^{n \times n}$

Věta

jsou-li $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou podobné matice, pak $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$

Věta

podobné matice mají shodná vlastní čísla včetně algebraických i geometrických násobností

Diagonalizovatelnost

matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je diagonalizovatelná, jestliže je podobná diagonální matici

Věta

matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je diagonalizovatelné právě tehdy, když má n lin. nezávislých vlastních vektorů

$$A = SDS^{-1}, D \text{ diagonální}$$

- ▶ diagonála D je tvořena vl. čísly matice A (s alg. násobnostmi)
- ▶ sloupce S tvoří vl. vektory ve stejném pořadí

A je diagonalizovatelná právě tehdy, když pro každé její vl. číslo je jeho algebraická násobnost rovna geometrické

Diagonalizovatelnost

Tvrzení

vlastní vektory odpovídající navzájem různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé

Důsledek

má-li matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ n různých vlastních čísel, je diagonalizovatelná

Symetrické matice

Věta

je-li $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symetrická matice, jsou všechna její vlastní čísla reálná

Věta (Spektrální rozklad sym. matic)

pro každou symetrickou matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existuje ortogonální $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a diagonální $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tak, že $A = QDQ^T$

tedy reálné symetrické matice jsou nejen diagonalizovatelné, ale dávají ortonormální bázi složenou z jejich vlastních vektorů

Jordanova normální forma

Jordanova buňka – $\lambda \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

matice je v Jordanově normální formě, pokud je v blokově diagonálním tvaru a bloky jsou Jordanovy buňky

$$J = I \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{k_m}(\lambda_m) \end{pmatrix}$$

Jordanova normální forma

Věta

*každá čtvercová matice je podobná matici v Jordanově normální formě
tato matice je až na pořadí buněk určena jednoznačně*

- ▶ počet Jordanových buněk odpovídajících λ je roven geometrické násobnosti vl. čísla λ
- ▶ součet velikostí všech Jordanových buněk odpovídajících λ je roven algebraické násobnosti vl. čísla λ